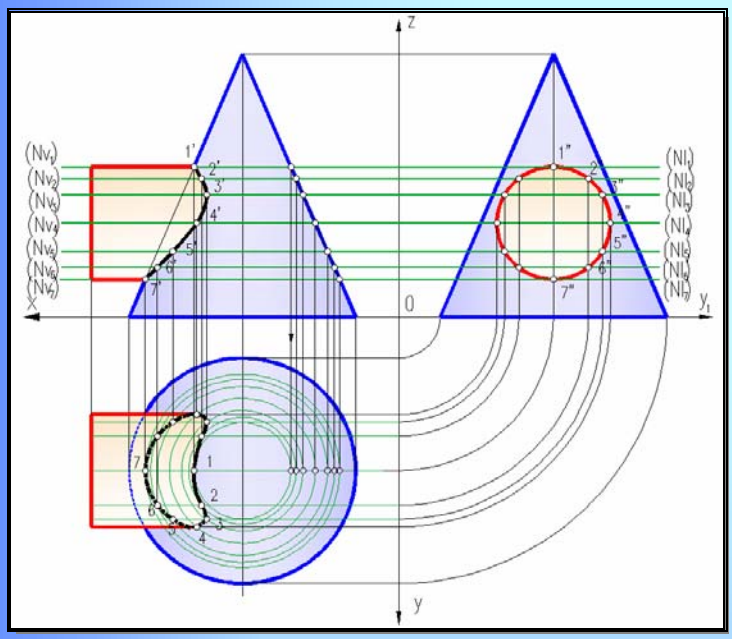
Ioan Lihteţchi

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ



Editura Universităţii "Transilvania" din Braşov
2010

Ioan LIHTEŢCHI

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

BRAŞOV
2010

©2010 EDITURA UNIVERSITĂŢII *TRANSILVANIA* BRAŞOV

Adresa: RO 500091 Braşov,
B-dul Iuliu Maniu 41A
Telefon: 0268 476050
Fax: 0268 476051
E-mail: editura@unitbv.ro

Toate drepturile rezervate

Editură acreditată de CNCSIS
Adresa nr. 1615 din 29 mai 2002

Referenţi ştiinţifici: Conf. univ. dr. ing. **Rodica SAVA**
Conf. univ. dr. ing. **Rodica PĂUNESCU**

Grafică: Autorul
Tehnoredactare: Autorul
Coperta: Autorul

ISBN – 978 – 973 – 598 – 756 - 1

Cuprins

Introducere 7

Modulul I. Noțiuni de bază în Geometria descriptivă 15

Introducere 15

Competențe 15

Unitatea de învățare MI.U1. Sisteme de proiecție. Reprezentarea punctului 16

MI.U1.1. Introducere 16

MI.U1.2. Competențe 16

MI.U1.3. Sisteme de proiecție 17

MI.U1.3.1. Proiecția centrală (conică) 17

MI.U1.3.2. Proiecția paralelă (cilindrică) 18

MI.U1.3.3. Proiecția ortogonală 19

MI.U1.3.4. Dubla proiecție ortogonală (proiecția Monge) 19

MI.U1.4. Reprezentarea punctului 19

MI.U1.4.1. Reprezentarea punctului în dublă proiecție ortogonală 19

MI.U1.4.1. Reprezentarea punctului în triplă proiecție ortogonală 22

MI.U1.5. Rezumat 30

MI.U1.6. Test de evaluare a cunoştinţelor 30

Unitatea de învățare M1.U2. Reprezentarea dreptei 31

MI.U2.1. Introducere 31

MI.U2.2. Competențe 31

MI.U2.3. Proiecțiile dreptei 31

MI.U2.4. Urmele şi traseul dreptei 32

MI.U2.5. Rezumat 37

MI.U2.6. Test de evaluare a cunoştinţelor 37

Unitatea de învățare M1.U3. Pozițiile dreptelor 38

MI.U3.1. Introducere 38

MI.U3.2. Competențe 39

MI.U3.3. Poziții particulare ale dreptei în raport cu planele de proiecție 39

MI.U3.3.1. Drepte paralele cu unul din planele de proiecție 39

MI.U3.3.2. Drepte perpendiculare pe unul din planele de proiecție 41

MI.U3.3.3. Drepte conținute în planele de proiecție 43

MI.U3.4. Poziții relative a două drepte 44

MI.U3.4.1. Drepte concurente 44

MI.U3.4.2. Drepte paralele 45

MI.U3.4.3. Drepte disjuncte 46
MI.U3.5. Rezumat 51
M1.U3.6. Test de evaluare a cunoştinţelor 52

Temă de control 52

Modulul II. Planul. Metodele geometriei descriptive 53
Introducere 53
Competenţe 54

Unitatea de învăţare MII.U1. Reprezentarea planului 55
MII.U1.1. Introducere 55
MII.U1.2. Competenţe 55
MII.U1.3. Urmele planului 56
MII.U1.4. Dreapta şi punctul conţinute în plan 57
MII.U1.5. Determinarea urmelor planului 57
MII.U1.6. Drepte particulare ale planului 59
MII.U1.6.1. Orizontalele unui plan 59
MII.U1.6.2. Frontalele unui plan 59
MII.U1.6.3. Dreptele de profil ale unui plan 61
MII.U1.6.4. Dreptele de cea mai mare pantă ale unui plan 61
MII.U1.7. Rezumat 64
MII.U1.8. Test de evaluare a cunoştinţelor 65

Unitatea de învăţare MII.U2. Poziţiile planelor şi ale dreptelor faţă de plane 66
MII.U2.1. Introducere 66
MII.U2.2. Competenţe 67
MII.U2.3. Plane în poziţii particulare faţă de planele de proiecţie 67
MII.U2.3.1. Plane paralele cu unul din planele de proiecţie 67
MII.U2.3.2. Plane perpendiculare pe unul din planele de proiecţie 69
MII.U2.4. Poziţia relativă a două plane 72
MII.U2.4.1. Plane concurente 72
MII.U2.4.2. Plane paralele 74
MII.U2.4.3. Plane perpendiculare 74
MII.U2.5. Poziţia relativă a unei drepte faţă de un plan 75
MII.U2.5.1. Dreaptă paralelă cu un plan 75
MII.U2.5.2. Dreaptă concurentă cu un plan 75
MII.U2.5.3. Dreaptă perpendiculară pe un plan 77
MII.U2.6. Rezumat 82
MII.U2.7. Test de evaluare a cunoştinţelor 83

Unitatea de învățare MII.U3. Metodele geometriei descriptive – I 84
MII.U3.1. Introducere 84
MII.U3.2. Competențe 85
MII.U3.3. Metoda schimbării planelor de proiecție 85
MII.U3.3.1. Schimbarea planului orizontal de proiecție pentru un punct 85
MII.U3.3.2. Schimbarea planului vertical de proiecție pentru un punct 86
MII.U3.3.3. Schimbarea planului orizontal de proiecție pentru o dreaptă 87
MII.U3.3.4. Schimbarea planului vertical de proiecție pentru o dreaptă 88
MII.U3.4. Metoda rotației 89
MII.U3.4.1. Rotația de nivel pentru un punct 89
MII.U3.4.2. Rotația de front pentru un punct 90
MII.U3.4.3. Rotația de nivel pentru o dreaptă 91
MII.U3.4.4. Rotația de front pentru o dreaptă 91
MII.U3.5. Rezumat 96
MII.U3.6. Test de evaluare a cunoştinţelor 97

Unitatea de învățare MII.U4. Metodele geometriei descriptive – II 98
MII.U4.1. Introducere 98
MII.U4.2. Competențe 98
MII.U4.3. Metoda rabaterii 99
MII.U4.3.1. Rabaterea unui plan oarecare pe planul orizontal de proiecție... 99
MII.U4.3.2. Rabaterea unui plan oarecare pe planul vertical de proiecție... 101
MII.U4.3.3. Rabaterea planelor proiectante 102
MII.U4.3.4. Ridicarea din rabatere 105
MII.U4.4. Rezumat 109
MII.U4.5. Test de evaluare a cunoştinţelor 109

Temă de control 110

Modulul III. Poliedre şi corpuri cilindro-conice 111
Introducere 111
Competențe 111

Unitatea de învățare MIII.U1. Poliedre.. 112
MIII.U1.1. Introducere 112
MIII.U1.2. Competențe 112
MIII.U1.3. Definiție şi clasificare 113
MIII.U1.3.1. Poliedre regulate 113
MIII.U1.3.2. Poliedre neregulate 114
MIII.U1.4. Reprezentarea poliedrelor 115
MIII.U1.5. Secțiuni plane prin poliedre 116

MIII.U1.5.1. Secțiuni plane prin prismă şi piramidă 116
MIII.U1.6. Desfăşurarea poliedrelor 118
MIII.U1.6.1. Desfăşurarea prismei 119
MIII.U1.6.2. Desfăşurarea piramidei 122
MIII.U1.7. Rezumat 127
MIII.U1.8. Test de evaluare a cunoştinţelor 127

Unitatea de învățare MIII.U2. Corpuri cilindro-conice 128
MIII.U2.1. Introducere 128
MIII.U2.2. Competențe 128
MIII.U2.3. Reprezentarea cilindrului şi conului 129
MIII.U2.4. Secțiuni plane în con şi cilindru 130
MIII.U1.4.1. Secțiuni plane în conul circular drept 130
MIII.U1.4.2. Secțiuni plane în cilindrul circular drept 131
MIII.U2.5. Desfăşurarea suprafețelor cilindro-conice 132
MII.U4.5.1. Desfăşurarea conului 132
MII.U4.5.2. Desfăşurarea trunchiului de con circular drept 134
MII.U4.5.3. Desfăşurarea cilindrului 134
MIII.U2.6. Rezumat 140
MIII.U2.7. Test de evaluare a cunoştinţelor 140

Unitatea de învățare MIII.U3. Intersecția corpurilor geometrice 141
MIII.U3.1. Introducere 141
MIII.U3.2. Competențe 141
MIII.U3.3. Intersecția corpurilor geometrice 142
MIII.U3.3.1. Intersecția poliedrelor 143
MIII.U3.3.2. Intersecția corpurilor cilindro-conice 146
MIII.U3.4. Rezumat 153
MIII.U3.5. Test de evaluare a cunoştinţelor 153

Temă de control 154

Bibliografie 155

Introducere

Încă din cele mai vechi timpuri oamenii şi-au pus problema reprezentării obiectelor din spaţiu prin desene plane. Până la sfârşitul secolului al XVIII-lea reprezentările grafice tehnice au avut un caracter mai puţin sistematic. Matematicianul francez *Gaspard Monge* (1748 – 1818) este cel care a sistematizat cunoştiinţele existente până la acea vreme şi a elaborat o teorie a reprezentărilor grafice bazată pe sistemul dublei proiecţii ortogonale. Prin tratatul său de Geometrie descriptivă intitulat *"Lecon de Geometrie Descriptive"* (1805), Gaspard Monge a rezolvat, pe baze matematice, problema reprezentării în plan a obiectelor spaţiale, utilizând sistemul dublei proiecţii ortogonale. Acest sistem asigură o corespondenţă biunivocă între punctele obiectului din spaţiul tridimensional şi proiecţiile acestora pe planele de proiecţie.

Gaspard Monge (1748 – 1818

De atunci şi până în prezent Geometria descriptivă se predă în aproape toate instituţiile de învăţământ tehnic superior din lume, contribuind decisiv la formarea arhitecţilor, a inginerilor şi a personalului tehnic din sfera producţiei materiale.

În ţara noastră Geometria descriptivă a fost introdusă chiar de la înfiinţarea primelor universităţi, la Iaşi în anul 1812 de Gheorghe Asachi şi la Bucureşti în anul 1818 de Gheorghe Lazăr.

Geometria Descriptivă este o parte a Geometriei Proiective şi este considerată regina geometriilor. Ea stabileste metodele de transformare a spaţiului tridimensional *(S3)* în spaţiul bidimensional *(S2)* şi reciproc, făcând posibil actul ingineresc de creaţie şi execuţie.

Prin studiul Geometriei descriptive, care este ***ştiinţa reprezentării grafice plane a spaţiului*****,** corpurile pot fi reprezentate în plan. Aceste reprezentări, în două dimensiuni, definesc cu exactitate forma corpului în spaţiu şi oferă totodată şi posibilitatea deducerii cu uşurinţă a poziţiei acestuia faţă de alte corpuri.

În figurile I1...I9, prezentate în continuare, sunt ilustrate o serie de construcţii civile şi industriale, ansambluri şi repere tehnice a căror concepţie şi realizare s-a făcut şi prin utilizarea cunoştiinţelor de geometrie descriptivă.

Fig. I1

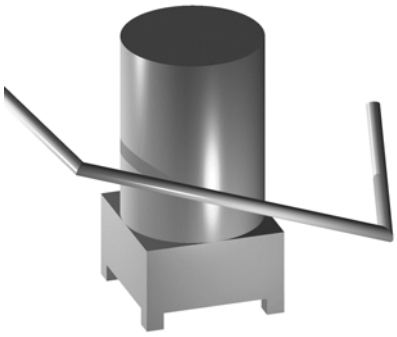
Fig. I2

Fig. I3

Fig. I4

Fig. I5

Fig. I6



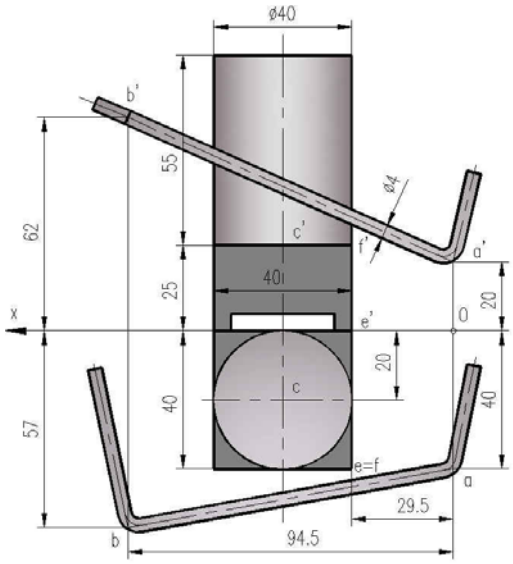


Fig. I7

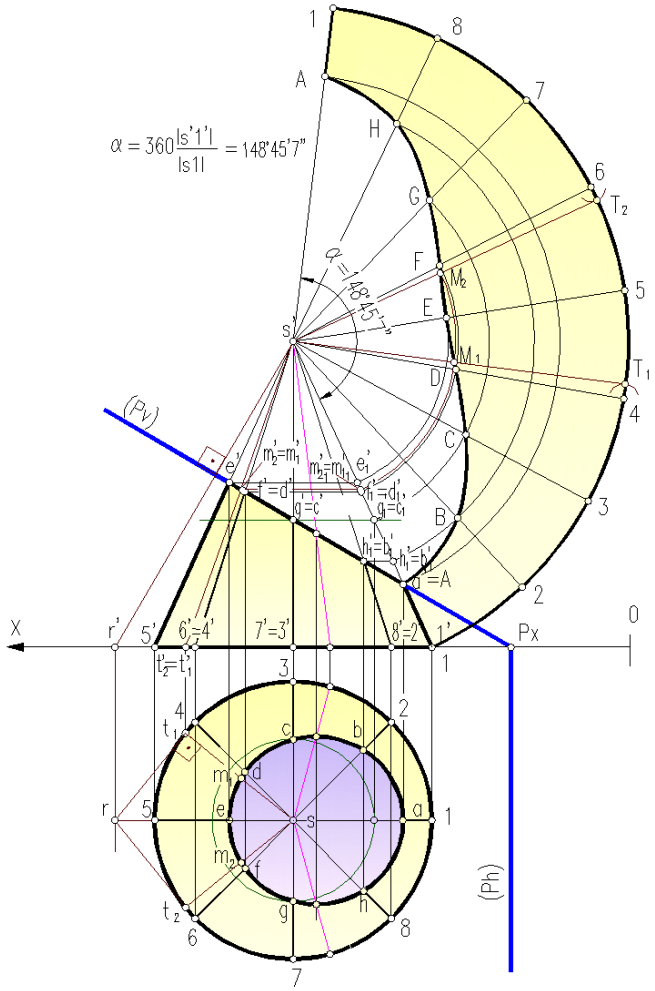

$\alpha = 360\frac{|s'1'|}{|s1|} = 148°45'7''$
$\alpha = 148°45'7''$
(Pv)
(Ph)
X
Px
A
H
G
F
E
D
C
B
1
2
3
4
5
6
7
8
T_1
T_2
M_1
M_2
s'
r'
r
s

Fig. I8

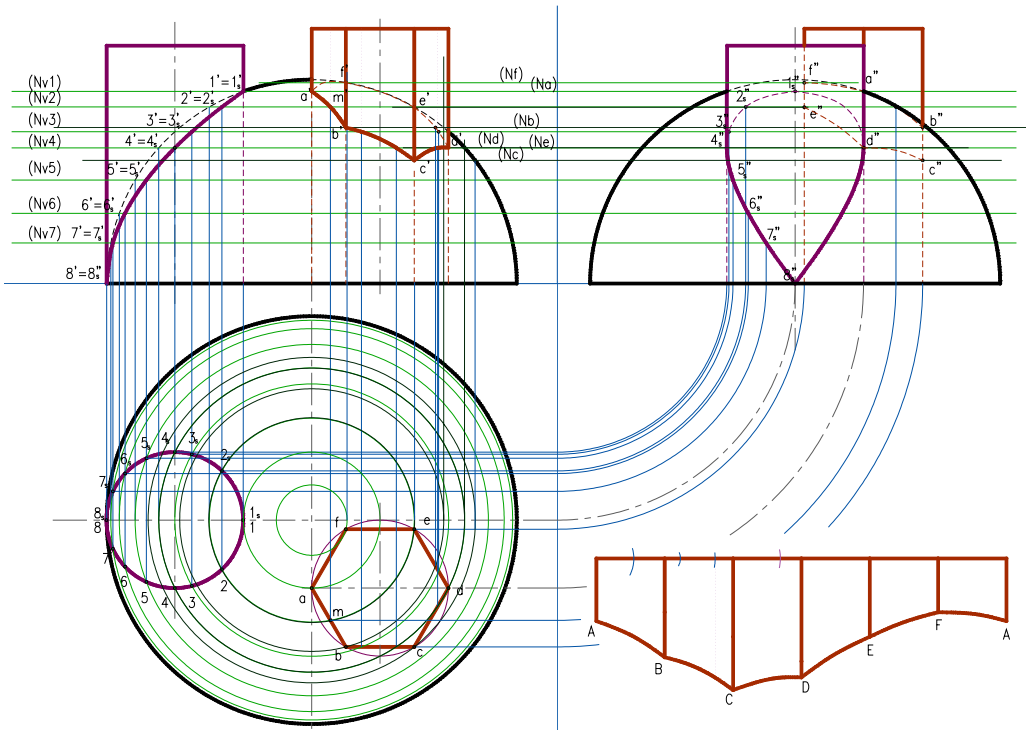

(Nv1)
(Nv2)
(Nv3)
(Nv4)
(Nv5)
(Nv6)
(Nv7)
(Na)
(Nb)
(Nc)
(Nd)
(Ne)
(Nf)
A
B
C
D
E
F

Fig. I9

Ştiința geometriei descriptive ajută şi la studiul altor discipline la care mecanismul matematic este adesea foarte greoi, oferind soluții elegante, rapide şi precise, mai ales atunci când se utilizează ca instrument de desenare – calculatorul – prin programe specializate.

Însuşirea raționamentului geometric specific acestei discipline, cât şi a principiilor şi convențiilor care stau la baza sistemelor de reprezentare plană a spațiului, sunt elemnte hotărâtoare în formarea deprinderilor de a gândi ştiințific şi de asigurare a unei punți de legătură eficiente între proiectant şi executant, între producător şi beneficiar.

Obiectivele cursului

Cursul intitulat *Geometrie Descriptivă* are ca scop general îmbogățirea cunoştințelor din sfera disciplinelor cu caracter tehnic general şi managerial ale studenților din domeniul tehnic. Acest curs nu îşi propune o prezentare exaustivă a cunoştințelor din acest domeniu, ci doar a acelor elemente indispensabile formării specialiştilor din domeniul ingineriei industriale.

Elementele avansate ale acestei discipline se studiază cu precădere în facultățile de construcții şi arhitectură.

Principalele obiective ale acestui curs sunt:

- dezvoltarea competențelor cognitive prin însuşirea modului de reprezentare grafică plană în dublă şi triplă proiecție ortogonală, a elementelor geometrice spațiale, ca bază teoretică a reprezentărilor din *Grafica tehnică industrială.*
- dezvoltarea calităților aplicativ-practice prin însuşirea principiilor şi metodelor grafice pentru realizarea desfăşurărilor de suprafețe, a secțiunilor prin corpuri şi a intersecțiilor acestora, precum şi stabilirea adevăratelor mărimi ale unor suprafețe, distanțe şi unghiuri;
- dezvoltarea competențelor de comunicare şi relaționare prin definirea reprezentărilor grafice ale obiectelor tehnice, în conformitate cu normele ISO europene, în scopul unui dialog eficient şi productiv între proiectant şi executant, între producător şi beneficiar, atît din punct de vedere tehnic cât şi economic.
- dezvoltarea personală şi profesională prin stimularea abilității de a vedea în spațiu şi dezvoltarea capacității de gestionare a învățării continue.

Competențe conferite

După parcurgerea materialului cursanții vor fi capabili:

- să definească sistemele de proiecție utilizate în grafica tehnică, în speță sistemul dublei proiecții ortogonale utilizat în *Geometria descriptivă* şi în *Desenul tehnic*;
- să construiască desenul plan – *epura* - oricărui element geometric (punct,

dreaptă, plan, corp) aflat într-o anumită poziție spațială şi să determine cu exactitate elementele relaționale spațiale dintre acestea, cum ar fi unghiuri, distanțe, vizibilitate etc.;

- să rezolve intersecția unei drepte cu un plan sau a unor figuri geometrice între ele; să reprezinte diverse figuri sau obiecte spațiale în cele trei proiecții;
- să-şi însuşească raționamentele geometrice de bază specifice acestei discipline şi principiile şi convențiile care stau la baza sistemelor de reprezentare plană a spațiului.
- să aplice tehnicile de lucru oferite de această disciplină, respectiv: metoda schimbării planelor de proiecție, metoda rotației şi metoda rabaterii;
- să determine adevărata mărime a unor segmente de dreaptă, a unor figuri plane şi să determine distanțe şi unghiuri spațiale în adevărată mărime prin utilizarea acestor tehnici;
- să definească modul de reprezentare în plan a corpurilor geometrice spațiale;
- să realizeze secțiuni plane prin aceste corpuri şi să construiască desfăşuratele acestora;
- să rezolve intersecții de corpuri.

Cerințe preliminare

Noțiuni elementare de geometrie plană şi în spațiu.

Resurse şi mijloace de lucru

Parcurgerea unităților de învățare aferente celor trei module ale cursului necesită existența unor mijloace şi instrumente de lucru clasice: masă de desenare, coli de hârtie albă (formate A4 şi A3), creion (se recomandă creioane mecanice de 0,5 sau 0,7 cu mina moale – B, creioane colorate), radieră şi instrumente de desenare (riglă, echer, compas). Ca alternativă, pentru desenare, se poate utiliza un calculator PC obişnuit şi un program de desenare asistată.

Temele de control se vor rezolva pe formate adecvate, liniate, în creion, cu instrumente de desen.

Pentru cei care cunosc un program de proiectare asistată (recomandabil AutoCAD) şi dispun de licența programului, rezolvarea problemelor şi a temelor de control se poate face în cadrul programului respectiv. Prezentarea acestora se va face pe o unitate de stocare a datelor şi prin tipărire.

Structura cursului

Cursul de Geometrie descriptivă este structurat în *trei module*, astfel:

- primul modul cuprinde trei unități de învățare;
- al doilea modul cuprinde patru unități de învățare;
- al treilea modul cuprinde trei unități de învățare.

La rândul lor, fiecare din cele 10 unități de învățare cuprinde: introducere, obiective, aspecte teoretice privind tematica unității, exemple, probleme propuse spre discuție şi rezolvare, precum şi teste de autoevaluare.
La sfârşitul fiecărui modul este indicată o *temă de control*.

Durata medie de studiu individual

Parcurgerea de către cursanți a unităților de învățare ale cursului de Geometrie descriptivă se poate face în aproximativ 2...4 ore pentru fiecare unitate.

Evaluarea

La sfârşitul semestrului se va susține un examen sau colocviu scris, la o dată programată de către conducerea facultății. Fiecare student va primi o notă acordată pe baza unei lucrări scrise ce va conține un subiect teoretic din materia prezentată în cadrul cursului şi una sau două probleme practice de sinteză ce vor fi rezolvate în creion cu instrumente de desen pe formate A_3.
Se vor acorda, de asemenea, note temelor de control obligatorii realizate pe parcursul semestrului şi predate la datele stabilite.

Notații şi simboluri

În cadrul acestui curs se utilizează următoarele notații şi simboluri:
[H] – planul orizontal de proiecție;
[V] – planul vertical de proiecție;
[L] – planul lateral de proiecție;
(Ox), (Oy), (Oz) – axe de coordonate;
A, B, C, … - puncte în spațiu;
a, b, c, … proiecțiile orizontale ale punctelor *A, B, C,* …;
a', b', c', … proiecțiile verticale ale punctelor *A, B, C,* …;
a", b", c", … proiecțiile laterale ale punctelor *A, B, C,* …;
(D) – dreapta *(D)* din spațiu;
(d) – proiecția orizontală a dreptei *(D)*; *(d')* – proiecția verticală a dreptei *(D)*; *(d")* – proiecția laterală a dreptei *(D)*;
(AB) – dreapta definită de punctele *A* şi *B* din spațiu;
/AB/– segmentul cuprins între punctele A şi B;
//AB// – mărimea segmentului */AB/*;
(O) – dreaptă orizontală;

(F) – dreaptă frontală;

H – urma orizontală în spațiu a unei drepte;

h, h', h" – proiecțiile urmei orizontale *H* pe cele trei plane de proiecție;

V – urma verticală în spație a unei drepte;

v, v', v" – proiecțiile urmei verticale pe cele trei plane de proiecție;

[P], [ABC] – un plan oarecare *[P]*, sau planul definit de trei puncte necolineare;

(Ph) – urma orizontală a planului *[P]*;

(Pv) – urma verticală a planului *[P]*;

(Pl) – urma laterală a planului *[P]*;

[N] – plan de nivel; *[F]* – plan de front;

[SABC] – piramida determinată de punctele *S, A, B, C*;

[ABCDA$_1$B$_1$C$_1$D$_1$] – prisma determinată de punctele *A, B, C, D, A$_1$, B$_1$, C$_1$, D$_1$*;

$\angle ABC$ – unghiul ABC;

ΔABC – triunghiul *ABC*;

$\llcorner$ - unghi drept;

$\parallel$ - paralel;

$\perp$ - perpendicular;

$\equiv$ - congruență; $<, =, >, \neq$ - relații de ordine; $\in$ - apartenență; $\notin$ - neapartenență;

$\cap$ - intersecție; $\cup$ - reuniune;

$\wedge, \vee$ - operatorii logici, „şi", respectiv „sau".

Modulul 1. Noțiuni de bază în Geometria descriptivă

Cuprins

Introducere 15
Competențe 15
MI.U1. Sisteme de proiecție. Reprezentarea punctului 16
MI.U2. Reprezentarea dreptei 31
MI.U3. Pozițiile dreptelor 38

Introducere

Prezentul modul abordează principalele instrumente şi concepte cu care operează Geometria descriptivă pentru reprezentarea plană a elementelor spațiale, pornind de la cele mai simple elemente geometrice – punctul şi dreapta.

Competențe

La sfârşitul acestui modul cursanții vor fi capabili:

- să definească sistemele de proiecție utilizate în grafica tehnică, în speță sistemul dublei şi triplei proiecții ortogonale, sisteme utilizate în Geometria descriptivă şi în Desenul tehnic;
- să construiască epura (desenul plan) punctelor şi dreptelor aflate într-o anumită poziție spațială pe baza coordonatelor date;
- să definească dreptele aflate în poziții particulare față de planele de proiecție şi să descrie proprietățile acestora;
- să definească poziția relativă a dreptelor şi să descrie proprietățile acestora;
- să recunoască poziția spațială a punctelor şi dreptelor în cadrul sistemului de proiecție triortogonal pe baza epurelor realizate;
- să determine cu exactitate elementele relaționale spațiale dintre acestea, cum ar fi adevarata mărime a unor segmente de dreaptă, unghiurile dintre acestea, distanțe, vizibilitate etc.

Unitatea de învățare MI.U1. Sisteme de proiecție. Reprezentarea punctului

Cuprins

MI.U1.1. Introducere 16
MI.U1.2. Competențe 16
MI.U1.3. Sisteme de proiecție. 17
MI.U1.3.1. Proiecția centrală (conică) 17
MI.U1.3.2. Proiecția paralelă (cilindrică) 18
MI.U1.3.3. Proiecția ortogonală 19
MI.U1.3.4. Dubla proiecție ortogonală (proiecția Monge) 19
MI.U1.4. Reprezentarea punctului 19
MI.U1.4.1. Reprezentarea punctului în dublă proiecție ortogonală 19
MI.U1.4.1. Reprezentarea punctului în triplă proiecție ortogonală 22
MI.U1.5. Rezumat 30
MI.U1.6. Test de evaluare a cunoştinţelor 30

MI.U1.1. Introducere

În prezenta unitate de învățare se definesc sistemele de proiecție utilizate in grafică în general, cu insistență asupra sistemelor dublei şi triplei proiecții ortogonale, sisteme care stau la baza tuturor reprezentărilor din cadrul geometriei descriptive. Se prezintă modul de reprezentare plană (*epura*) a celui mai simplu element geometric spațial – punctul.

MI.U1.2. Competențe

La sfârşitul acestei unități de învățare studenții vor fi capabili:

- să definească ce sunt sistemele de proiecție utilizate în grafica tehnică;
- să construiască epura (desenul plan) punctului aflat într-o anumită poziție spațială şi să determine cu exactitate proiecțiile acestuia în funcție de coordonate.

Durata medie de parcurgere a acestei unități de învățare este de 3 ore.

MI.U1.3. Sisteme de proiecție

Operația prin care un obiect din spațiu este reprezentat pe un plan se numeşte *proiecție*.

A proiecta un punct oarecare *M* din spațiu pe un plan de proiecție *[P]*, presupune alegerea unui *sistem de proiecție* (fig. MI.U1.1) format din următoarele elemente:

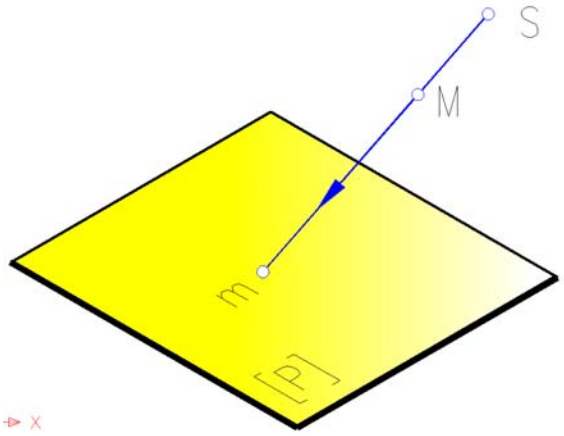


Fig. MI.U1.1

- *[P]* – planul de proiecție;
- S – centrul de proiecție;
- *(SM)* proiectanta (dreapta care uneşte centrul de proiecție S cu punctul *M* şi care intersectează planul *[P]* în *m* ;
- *m* – proiecția punctului *M*.

Pentru a obține proiecția unui corp, se construiesc proiecțiile mai multor puncte caracteristice ale acestuia.

MI.U1.3.1. Proiecția centrală (conică)

Se consideră sistemul de proiecție cu elementele prezentate anterior (§MI.U1.3).

Proiecția centrală sau *conică* (fig. MI.U1.2) se caracterizează prin faptul că centrul de proiecție *S* se află la o distanță finită de planul de proiecție *[P]*. Pentru un segment de dreaptă $/MN/ \not\subset [P]$ (fig. MI.U1.2), se obține proiecția centrală $/mn/$ care diferă ca mărime de segmentul $/MN/$. Proiectantele $/SM/$ şi $/SN/$ concurente în punctul *S*, definesc planul *[Q]* – plan proiectant, iar proiecția $/mn/$ a segmentului $/MN/$ din spațiu aparține dreptei *(D)* de intersecție a planului proiectant *[Q]* cu planul de proiecție *[P]*.

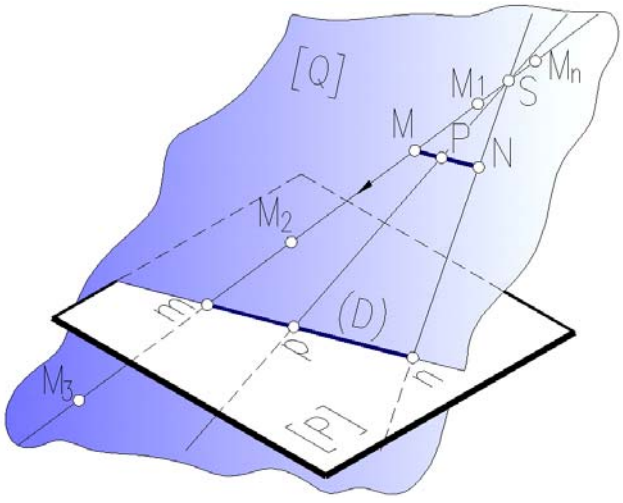


Fig. MI.U1.2

Dacă se consideră un alt punct $P \in /MN/$, proiecția lui *p* se va situa pe dreapta *(D)* de intersecție a celor două plane *[P]* şi *[Q]*. În consecință, un punct de pe dreaptă îşi are proiecția pe proiecția dreptei.

Proiecția centrală nu păstrează adevărata mărime şi formă a corpului reprezentat.

În cazul proiecției centrale, *nu se realizează o relație de biunivocitate* între punctul din spațiu şi proiecția sa. Aşa cum se observă şi din fig. MI.U1.2, pentru punctul *M* din spațiu se obține o singură proiecție *m* pe planul *[P]*, dar, pe aceeaşi proiectantă se găseşte o infinitate de puncte $M_1, M_2, M_3 ... M_n$, care au aceeaşi proiecție *m*.

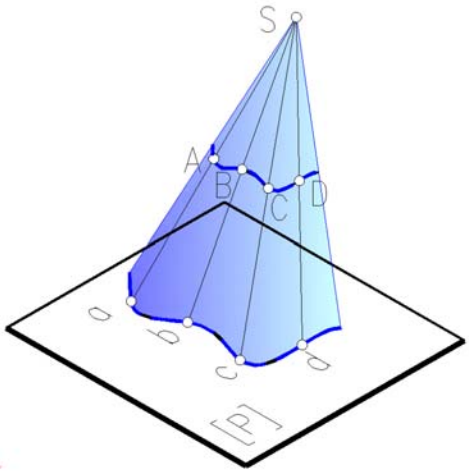


Fig. MI.U1.3

Dacă se consideră o curbă oarecare în spațiu (fig. MI.U1.3), se observă că înfăşurătoarea proiectantelor este o suprafață conică, ceea ce a condus şi la denumirea de *proiecție conică* a acestui gen de proiecție.

Această proiecție se utilizează cu precădere în desenul arhitectural.

MI.U1.3.2. Proiecția paralelă (cilindrică)

Proiecția paralelă utilizează drepte proiectante paralele între ele.

Fiind dată o direcție *(D)* şi un plan de proiecție *[P]* (fig. MI.U1.4) proiectantele punctelor *A, B, C* din spațiu sunt paralele între ele şi paralele cu direcția *(D)*. La intersecția acestor proiectante cu planul [P] se obțin proiecțiile *a, b, c,* ale punctelor respective.

Proiecția paralelă se mai numeşte şi *proiecție cilindrică* datorită faptului că înfăşurătoarea proiectantelor unei curbe spațiale este o suprafață cilindrică (fig. MI.U1.5). Dacă direcția *(D)* este oblică față de planul *[P],* rezultă *proiecția paralelă oblică*, iar dacă *(D)* ⊥ *[P]* se obține *proiecția paralelă ortogonală*.

Nici în cazul proiecției paralele nu se asigură relația de biunivocitate, deoarece unei proiecții *a* din planul *[P]* îi corespund o infinitate de puncte plasate pe proiectanta din *A* (fig. MI.U1.4).

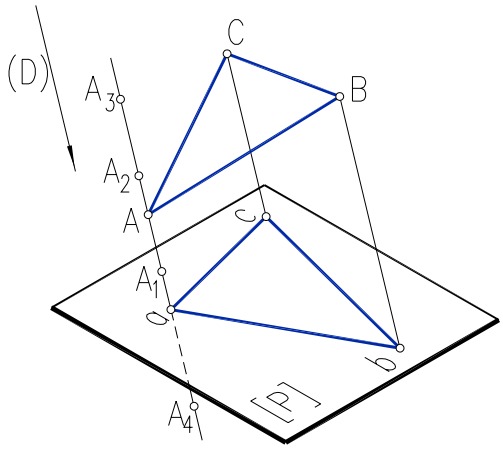


Fig. MI.U1.4

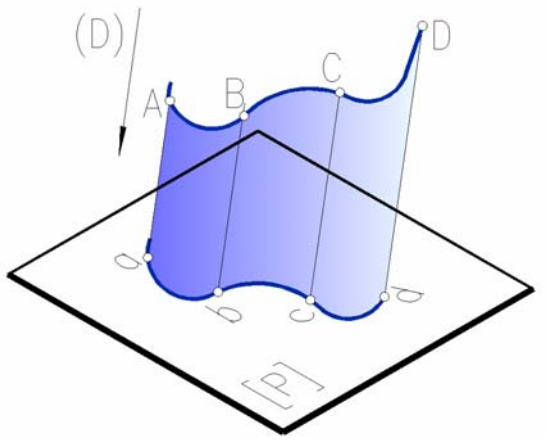


Fig. MI.U1.5

MI.U1.3.3. Proiecția ortogonală

Proiecția ortogonală este proiecția paralelă în care direcția de proiecție *(D)*, respectiv proiectantele sunt perpendiculare pe planul de proiecție *[P]*.

În cazul proiecției paralele ortogonale o figură din spațiu se proiecteză în adevărată mărime pe planul de proiecție *[P]* dacă planul figurii este paralel cu planul de proiecție (poligonul *ABCDE*) şi deformată dacă nu este paralelă cu planul de proiecție (dreptunghiul *MNPR*) (fig. MI.U1.6).

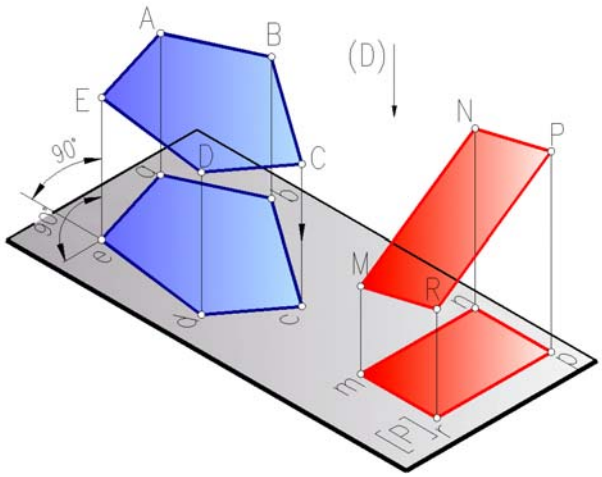


Fig. MI.U1.6

MI.U1.3.4. Dubla proiecție ortogonală (proiecția Monge)

În principiu, *dubla proiecție ortogonală* constă în proiectarea ortogonală a unor elemente din spațiu pe două plane de proiecție perpendiculare între ele. Cele două plane sunt denumite convențional, *plan orizontal de proiecție [H]* şi *plan vertical de proiecție [V]*. Intersecția dintre cele două plane formează *axa (Ox)* sau aşa numita *linie de pământ* (fig. MI.U1.7).

Acest sistem de proiecție stă la baza geometriei descriptive şi a desenului tehnic.

MI.U1.4. Reprezentarea punctului

Un punct din spațiu se proiectează perpendicular pe planele de proiecție ale sistemului ortogonal, iar după suprapunerea planelor prin rabatere rezultă aşa-numita *epură*, desen care stă la baza tuturor construcțiilor din geometria descriptivă.

MI.U1.4.1. Reprezentarea punctului în dubla proiecție ortogonală

Cele două plane de proiecție - *planul orizontal de proiecție [H]* şi *planul vertical de proiecție [V]* – împart spațiul în patru zone numite *diedre* (fig. MI.U1.7).

Un punct *A* din spațiu, aflat în cadrul acestui sistem de proiecție, se va proiecta pe planul orizontal de proiecție *[H]* în *a* – proiecția orizontală a punctului *A* - şi pe planul vertical de proiecție *[V]* în *a'* - proiecția verticală a punctului *A*.

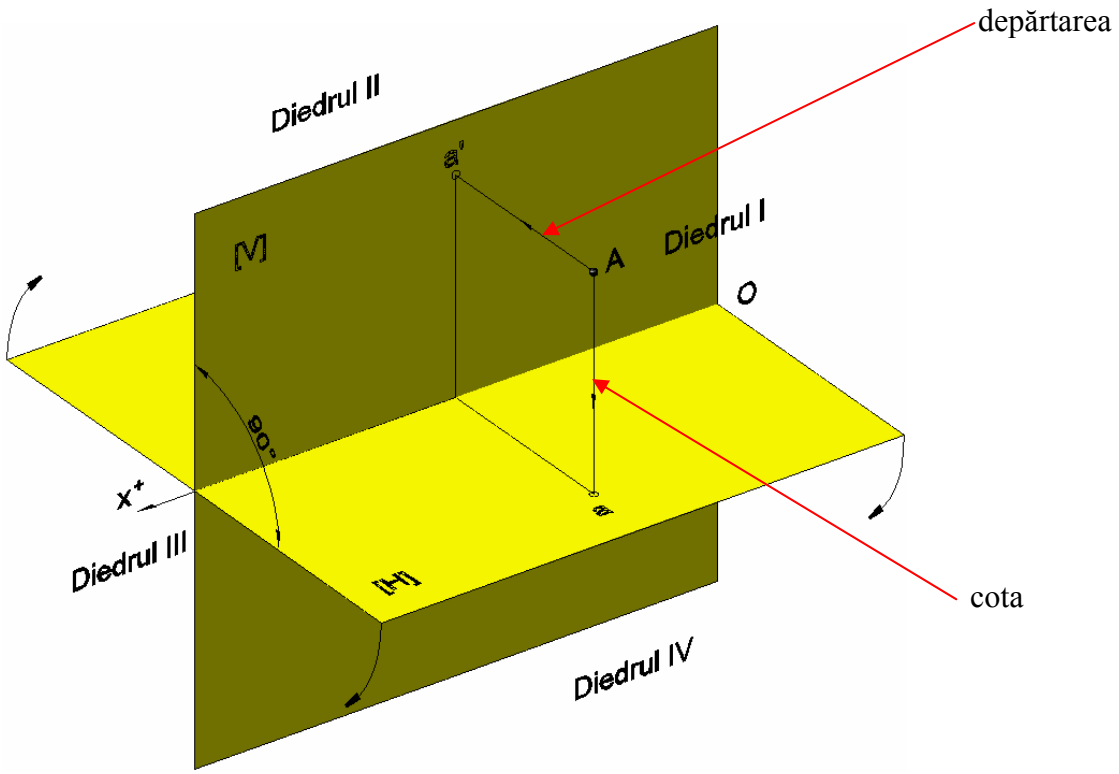


Fig. MI.U1.7

Distanța de la *A* la *[H]* se numește ***cotă*** și se notează cu *z,* iar distanța de la *A* la *[V]* se numește ***depărtare*** și se notează cu *y* (fig. MI.U1.8).

Prin convenție, s-a stabilit că observatorul se află în diedrul *I* cu fața spre planul vertical. Punctele aflate deasupra planului orizontal de proiecție *[H]* au cota pozitivă, iar cele situate sub planul orizontal de proiecție *[H]* au cota negativă. Punctele aflate în fața planului vertical de proiecție *[V]* au depărtarea pozitivă, iar cele situate în spatele planului vertical de proiecție *[V]* au depărtarea negativă.

Prin rotirea planului orizontal de proiecție *[H]* în jurul axei *(Ox)*, în sensul acelor de ceasornic, peste planul vertical de proiecție *[V]*, rezultă desenul din fig. MI.U1.9, desen numit ***epură***.

Acest desen – ***epura*** - stă la baza tuturor rezolvărilor grafice din geometria descriptivă.

Epura se definește ca fiind reprezentarea plană, convențională, a elementelor spațiale proiectate ortogonal pe planele de proiecție, reprezentare în cadrul căreia sunt utilizate numai *axele de proiecție*, *proiecțiile* elementelor respective, *notațiile* și *liniile de ordine* corespunzătoare.

Luați două foi de hârtie cartonate și construiți sistemul de proiecție din fig. MI.U1.7. Analizați care sunt cele patru diedre. Rotiți planul orizontal de proiecție peste cel vertical.

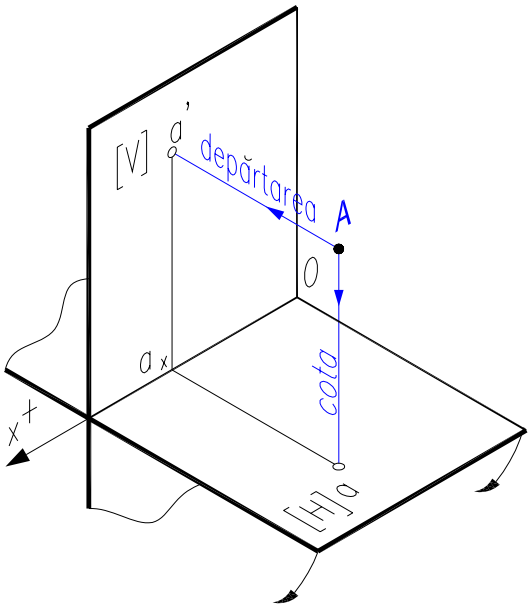


Fig. MI.U1.8

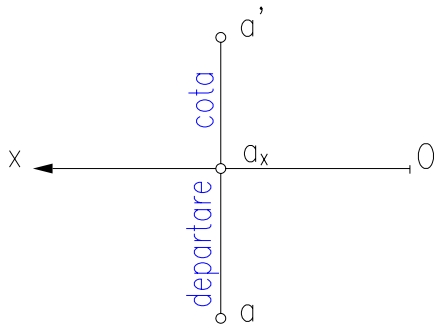


Fig. MI.U1.9

Se observă că, dacă sunt cunoscute proiecțiile *a* şi *a'* ale punctului *A*, se poate determina poziția spațială a punctului la intersecția proiectantelor.

Datorită acestui considerent, în dubla proiecție ortogonală se realizează o corespondență biunivocă între punctele din spațiu şi proiecțiile lor pe cele două plane.

Considerând punctele *A, B, C* şi *D* situate în diedrele *I*, respectiv *II*, *III* şi *IV* (v. şi fig. MI.U1.7), epurele acestor puncte sunt prezentate în fig. MI.U1.10. Se măsoară depărtarea, pe linia de ordine perpendiculară pe axa *(Ox)* şi se notează proiecția orizontală a punctului, apoi, pe aceeaşi linie de ordine se măsoară cota şi se notează proiecția verticală a punctului. Convențional, linia de ordine se desenează cu linie subțire continuă, iar proiecțiile punctelor se reprezintă printr-un mic cerculeț.

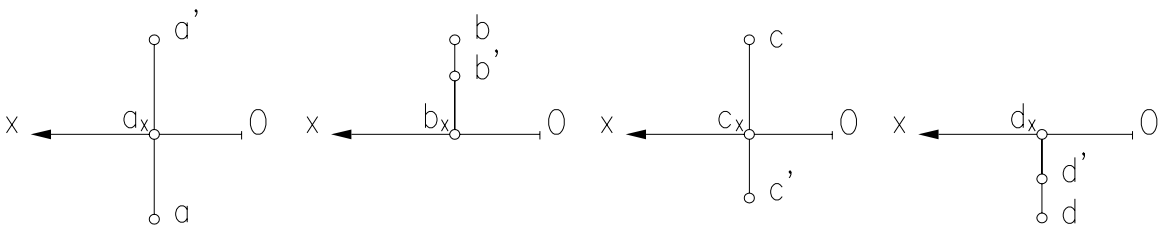


Fig. MI.U1.10

Urmărind reprezentările din cele patru epure, se constată că depărtările pozitive se măsoară sub axa *(Ox)*, iar depărtările negative deasupra axei *(Ox)*. Cotele pozitive se măsoară desupra axei *(Ox)*, iar cotele negative sub axă. Acest lucru se deduce cu uşurință urmărind sensul de rotație al planului orizontal de proiecție *[H]* până la suprapunerea lui peste planul

vertical de proiecție *[V]* (fig. MI.U1.7, fig. MI.U1.8) şi convenția de stabilire a coordonatelor pozitive sau negative prezentată mai sus.

Citind, în epură, semnul coordonatelor descriptive ale punctului figurat, se poate stabili cu uşurință poziția spațială a acestuia.

MI.U1.4.2. Reprezentarea punctului în tripla proiecție ortogonală

Pentru o mai bună definire a poziției spațiale a unui element spațial, în geometria descriptivă s-a introdus şi un al treilea plan de proiecție – *planul lateral de proiecție [L]* – plan perpendicular pe planele orizontal de proiecție *[H]* şi vertical de proiecție *[V]* (fig. MI.U1.11). Acest plan împarte spațiul în *opt* zone numite ***triedre***.

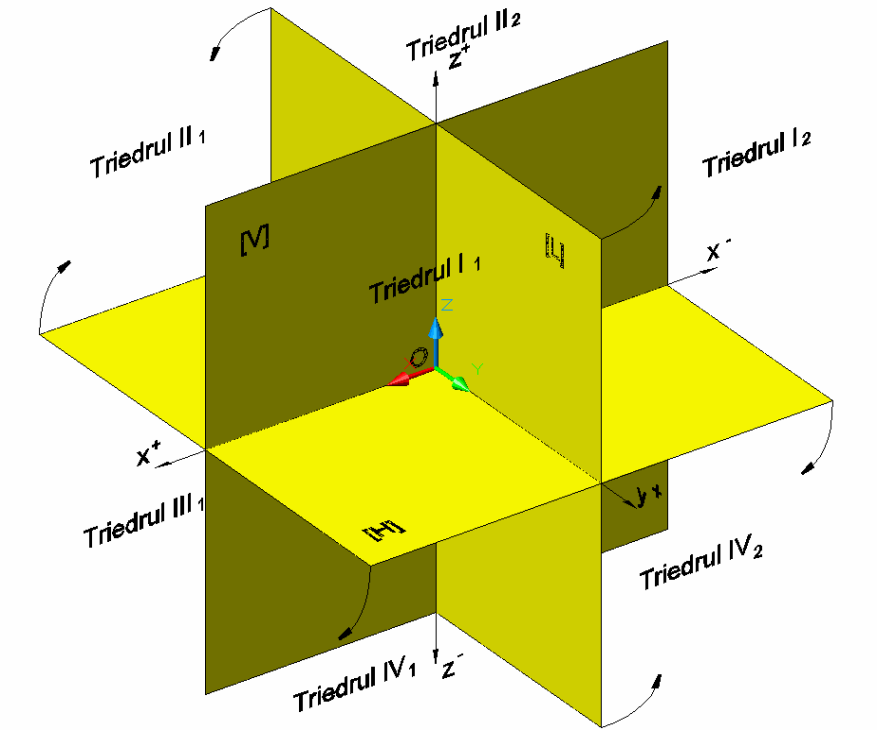


Fig. MI.U1.11

Proiectând un punct *A* din spațiu şi pe planul lateral de proiecție, se obține cea de-a treia proiecție notată *a"*, numită *proiecție laterală* (fig. MI.U1.12). Distanța de la punctul *A* la proiecția *a"* se numeşte ***abscisă*** şi reprezintă cea de-a treia coordonată descriptivă a punctului.

Introducerea planului lateral de proiecție *[L]* determină în spațiu încă două axe *(Oy) şi (Oz)*. Împreună cu *(Ox)*, aceste axe sunt numite *axe de proiecție*. Trecerea la reprezentarea în epură se face, ca şi în cazul diedrelor, prin rotirea planului orizontal de proiecție *[H]* în jurul axei *(Ox)*, în sensul indicat de săgeți şi prin rotirea planului lateral de proiecție *[L]* în jurul axei (*Oz*), în sensul indicat de săgeți, până la suprapunerea lor peste planul vertical de proiecție .

Se observă că după rabaterea planului orizontal de proiecție *[H]*, proiecția orizontală *a* a punctului *A*, va fi pe aceeaşi linie de ordine, perpendiculară pe axa *(Ox)*, cu proiecția verticală *a'*. Proiecția laterală *a"* a punctului *A*, după rabaterea planului lateral *[L]*, descrie un sfert de cerc cu raza egală cu depărtarea şi ajunge în prelungirea paralelei $(a'a_z)$ la axa *(Ox)*.

Convențional, axa *(Oy)* suprapusă peste axa *(Ox)* (sensul negativ) se notează cu (Oy_1).

Cu ajutorul unor coli de hârtie cartonată construiți sistemul de proiecție din fig. MI.U1.11. Analizați care sunt cele opt triedre. Rețineți numerotarea lor. Rotiți planele orizontal de proiecție şi lateral de proiecție în sensul indicat în figură.

În fig. MI.U1.13 se prezintă *epura* punctului *A* situat în triedrul I_1 (reprezentare spațială în fig. MI.U1.12).

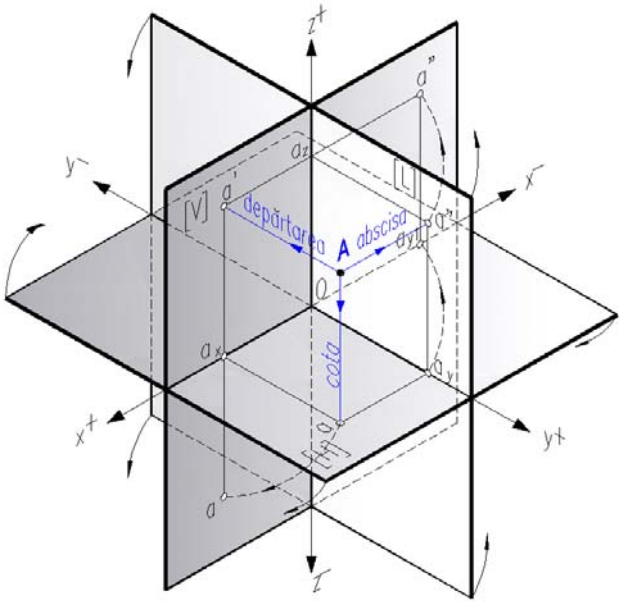


Fig. MI.U1.12

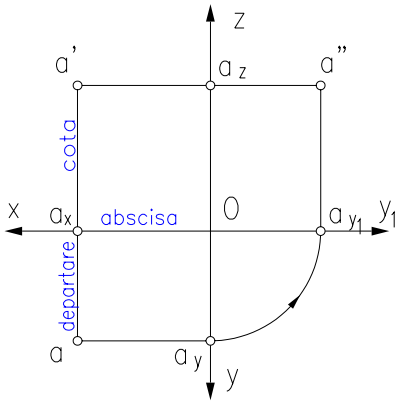


Fig. MI.U1.13

Semnele coordonatelor descriptive din cele opt triedre, aşa cum rezultă şi din Fig. MI.U1.12, sunt prezentate în tabelul 1.1.

Tabelul 1.1

Triedrul / Coordonata	I_1	II_1	III_1	IV_1	I_2	II_2	III_2	IV_2
Abscisa (x)	+	+	+	+	-	-	-	-
Depărtarea (y)	+	-	-	+	+	-	-	+
Cota (z)	+	+	-	-	+	+	-	-

În fig. MI.U1.14 este figurat un punct *B* (reprezentare spațială) plasat în *triedrul* II_1.

În fig. MI.U1.15 se prezintă *epura* acestui punct. Se constată că proiecția orizontală *b* se plasează deasupra axei *(Ox)*, depărtarea fiind negativă, la stânga originii, abscisa fiind

pozitivă, proiecția verticală *b'* tot deasupra, pe aceeaşi linie de ordine, cota fiind pozitivă. Proiecția laterală *b"* se obține transpunând depărtarea negativă printr-un arc de cerc în sens trigonometric, la aceeaşi cotă cu *b'*.

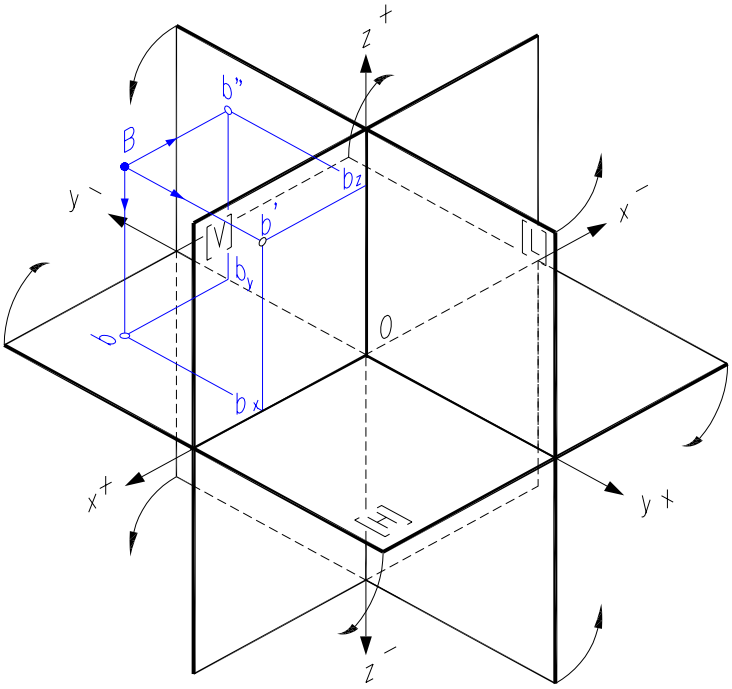


Fig. MI.U1.14

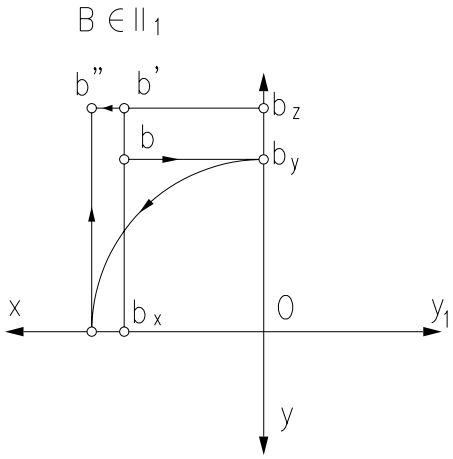
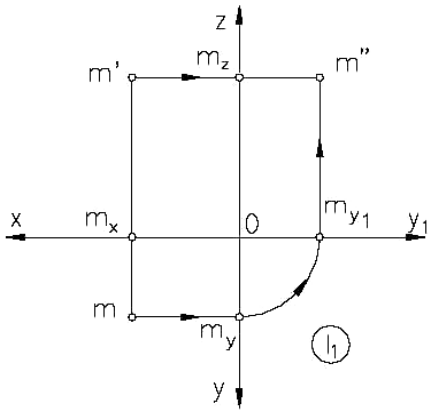
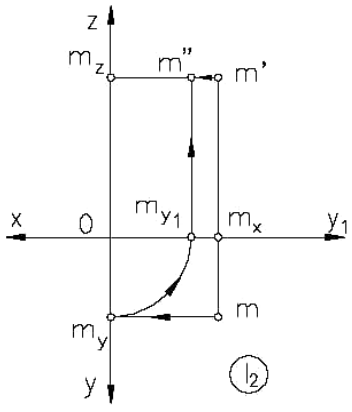


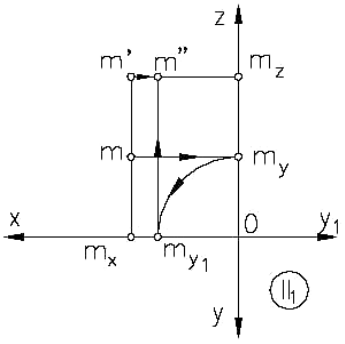
Fig. MI.U1.15

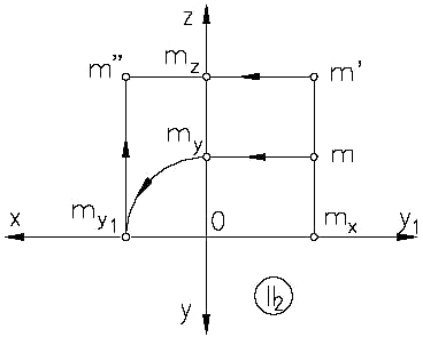
Exemple

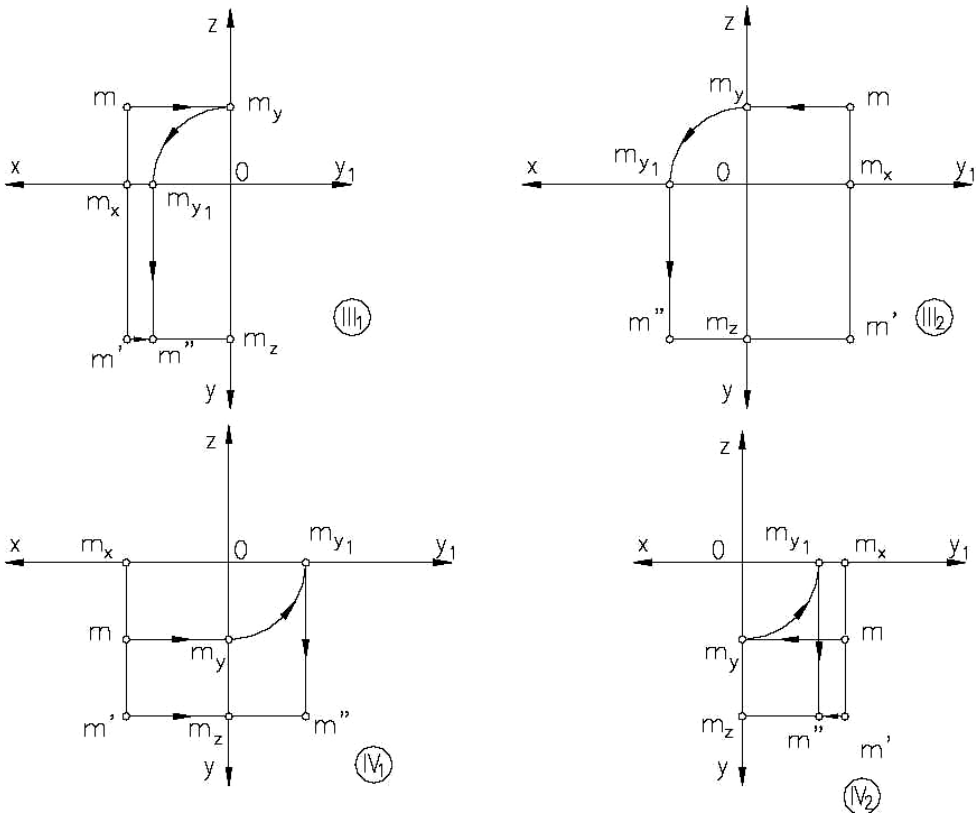
În continuare sunt prezentate epurele unui punct *M* situat, pe rând, în fiecare din cele opt triedre.











Construiți epurele punctelor:
A ∈ [I₁]; B ∈ [III₂]; C ∈ [IV₁].

Punctele situate pe planele de proiecție sau pe axele de proiecție sunt numite şi *puncte particulare.* Spre exemplificare, în fig. MI.U1.16 se prezintă poziția spațială a patru puncte *M∈ [H]*, *N ∈ [L], P ∈ (Ox)* şi *T ∈ (Oz)*, iar în fig. MI.U1.17…1.20 sunt prezentate *epurele* acestor puncte.

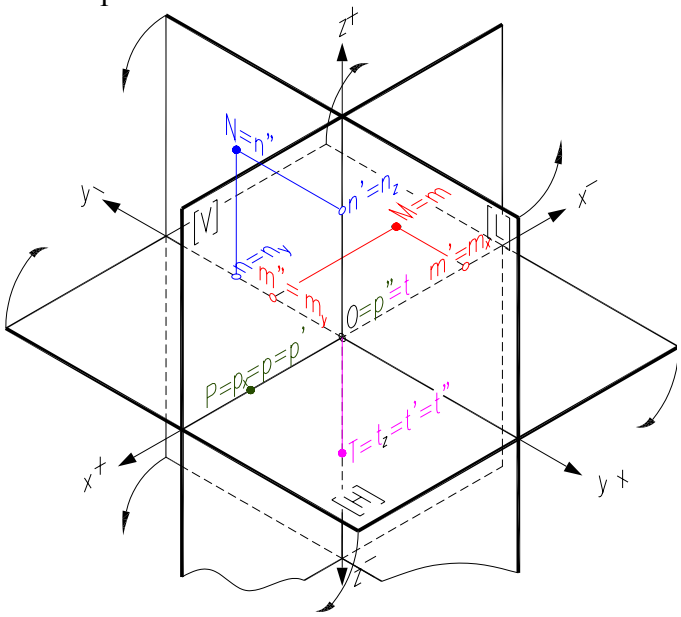


Fig. MI.U1.16

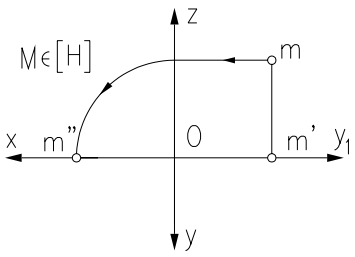


Fig. MI.U1.17

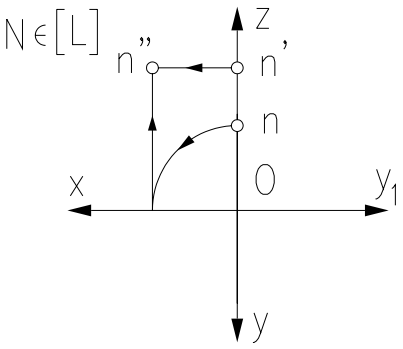


Fig. MI.U1.18

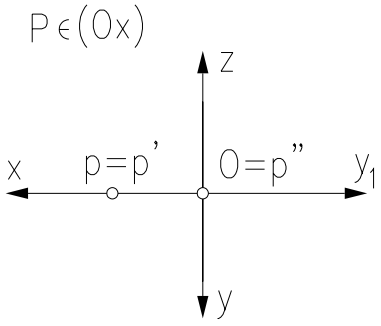


Fig. MI.U1.19

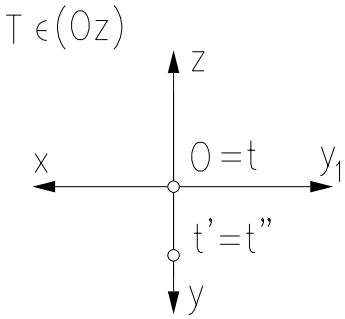


Fig. MI.U1.20

Planele care împart cele patru diedre în părți egale se numesc *plane bisectoare*, iar cele opt zone rezultate se numesc *octanți*. În fig. MI.U1.21 sunt ilustrate cele două plane bisectoare *[B1]* și *[B2]*.

Un plan bisector reprezintă locul geometric al punctelor egal depărtate de planele de proiecție al căror diedru îl împarte. În consecință, un punct aparținând unui plan bisector are cota egală cu depărtarea în valoare absolută.

În fig. MI.U1.22 se prezintă epura unui punct *M ∈ [B2]* din *diedrul IV*, *triedrul IV1*.

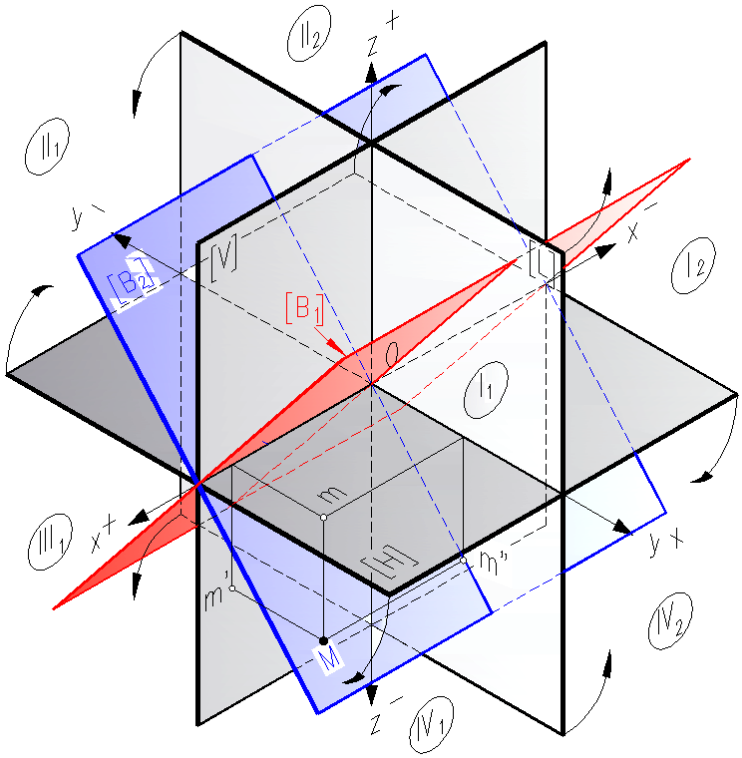


Fig. MI.U1.21

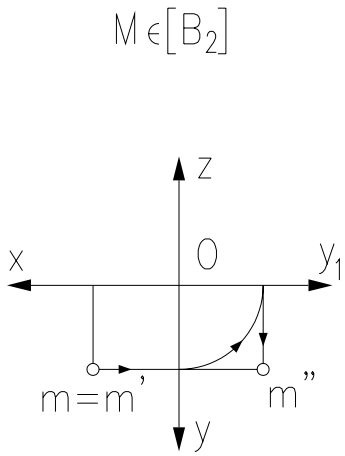


Fig. MI.U1.22

Exemple

1. Se dă punctul *A(-30,-25,40)*. Să se construiască epura punctului *A* şi să se stabilească triedrul în care se află acest punct (fig. MI.U1.23).

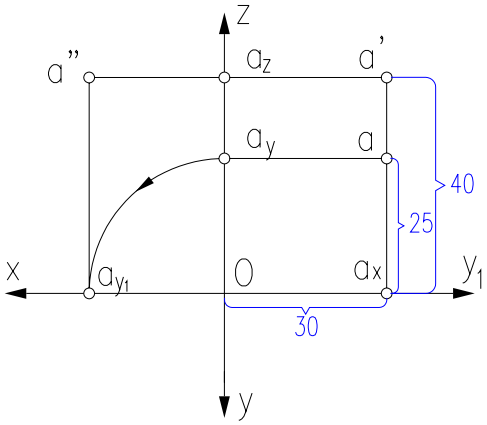


Fig. MI.U1.23

Rezolvare: se consideră sistemul de axe *Oxyz* şi unitatea de măsură a coordonatelor descriptive (abscisa, depărtarea, cota) - milimetrul (mm). Cunoscând valorile numerice ale coordonatelor punctului *A* în ordinea - abscisă, depărtare, cotă – se măsoară mai întâi valoarea abscisei în sensul negativ al axei *(Ox)*, rezultând a_x. Prin a_x se trasează linia de ordine perpendiculară pe *(Ox)*, pe care se măsoară depărtarea deasupra axei *(Ox)*, aceasta fiind negativă, şi cota tot deasupra axei *(Ox)*, fiind pozitivă. Se obţin, astfel, proiecţiile orizontală *a* şi verticală *a'*. Se trasează, în continuare, linia de ordine $(aa_y) \perp (Oy)$, transpunând, astfel, depărtarea pe axa *(Oy)*. Cu centrul în *O* se trasează un arc de cerc, în sens trigonometric, rezultând a_{y1}. La intersecţia liniilor de odine perpendiculare pe (O_{y1}) prin a_{y1} şi pe *(Oz)* prin *a'*, rezultă proiecţia laterală *a''*. Pentru determinarea triedrului în care se situează punctul, se analizează semnele coordonatelor descriptive. Având: $x_A < 0$; $y_A < 0$ si $z_A > 0$, rezultă că $A \in II_2$.

2. Să se reprezinte în epură punctul *A(-20,28,-34)* şi simetricele sale A_1 şi A_2 faţă de planele de proiecţie *[H]* şi, respectiv, *[V]*. Să se specifice triedrele şi octanţii în care se găsesc aceste puncte (fig. MI.U1.24).

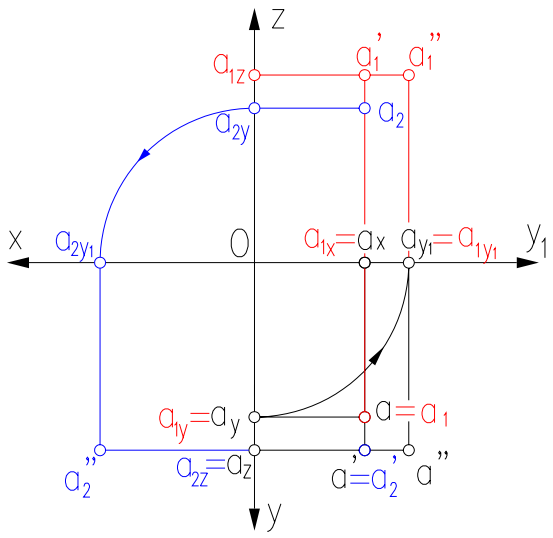


Fig. M1.U1.24

Rezolvare: punctul *A* se află în triedrul IV_2. Simetricul A_1, faţă de *[H]*, se află situat în triedrul I_2 la cotă egală şi de semn contrar cotei punctului *A*, având coordonatele descriptive *A(-20,28,34)*. Simetricul A_2, faţa de *[V]*, se află situat în triedrul III_2

la depărtare egală şi de semn contrar faţă de depărtarea punctului *A,* având coordonatele descriptive *A(-20,-28,-34)*.

Pentru stabilirea octanţilor se analizează valorile absolute ale coordonatelor descriptive.

Pentru cele trei puncte rezultă:

A se află în octantul 7, având *(y > 0, z < 0)* şi */y/ < /z/*;

A_1 se află în octantul 2, având *(y > 0, z > 0)* şi */y/ < /z/*;

A_2 se află în octantul 6, având *(y < 0, z < 0)* şi */y/ < /z/*.

3. Fie punctul *M (16, 20, -30)*. Să se construiască epurele punctelor: *N* simetricul lui *M* faţă de axa *(Ox)*, *P* simetricul lui *M* faţă de origine şi *R* simetricul lui *M* faţă de planul bisector $[B_2]$. Să se precizeze şi triedrele în care se găsesc aceste puncte.

Rezolvare: punctul *M* aparţine triedrului IV_1 ; epura este prezentată în Fig. MI.U1.25.

Punctul *N* va avea schimbat semnul coordonatelor descriptive *y* şi *z,* deci va avea coordonatele *N(16,-20,30)* (fig. MI.U1.26) şi aparţine triedrului II_1.

Punctul *P* va avea schimbat, faţă de M, semnul tuturor coordonatelor, deci va avea coordonatele *P(-16,-20,30)* şi aparţine triedrului II_2 (epura în Fig. MI.U1.27).

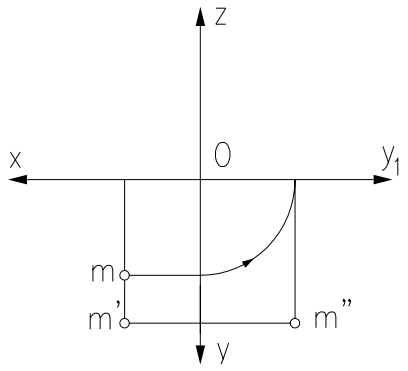


Fig. MI.U1.25

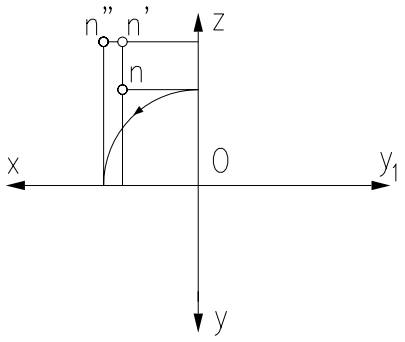


Fig. MI.U1.26

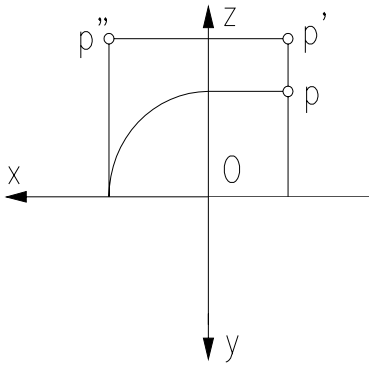


Fig. MI.U1.27

Proiectând sistemul de referinţă alcătuit din planele *[H]*, *[V]* şi *[L]* după direcţia axei *(Ox),* ca în fig. MI.U1.28, se poate urmări poziţia punctului *M* şi a simetricului acestuia *R* faţă de $[B_2]$. Coordonatele acestuia sunt *R(16,30,-20)*. Epura punctului *R* este prezentată în fig. MI.U1.29.

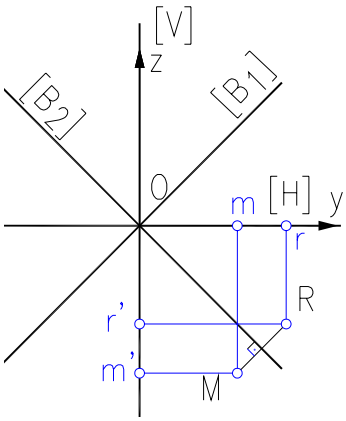


Fig. MI.U1.28

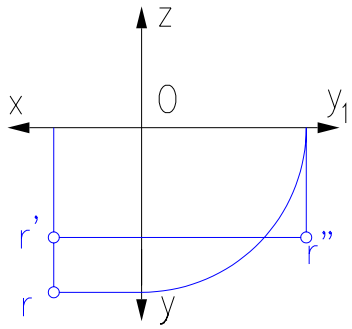


Fig. MI.U1.29

1. Să se reprezinte în epură punctele *A(20,5,50), B(45,-50,15), C(0,-20,-30), M(60,-40,40), N(14, 0,-28)* şi *P(0,-30,0).* Să se specifice triedrele, planele de proiecţie sau axele de proiecţie în care sau pe care sunt situate aceste puncte.

2. Se dă punctul *M(30,40,10)*. Să se reprezinte în epură simetricele acestui punct faţă de planele de proiecţie, faţă de axele de proiecţie şi faţă de origine şi să se precizeze triedrele în care sunt situate.

3. Se dă punctul *A(-30,20,-40)*. Să se precizeze simetricele acestuia faţă de planele bisectoare.

4. Să se construiască epura punctului *B* a cărui distanţă faţă de axa *(Ox)* este de 22 mm, faţă de axa *(Oz)* de 30 mm, iar distanţa până la planul orizontal de proiecţie *[H]* este de 18 mm.

- **Să ne reamintim...**

- Dubla proiecţie ortogonală constă în proiectarea ortogonală (perpendiculară) a unor elemente din spaţiu pe plane de proiecţie perpendiculare între ele.
- Cele două plane de proiecţie - *planul orizontal de proiecţie [H]* şi *planul vertical de proiecţie [V]* – împart spaţiul în patru zone numite *diedre*.
- Introducerea celui de-al treilea plan de proiecţie – *planul lateral de proiecţie [L]* – perpendicular pe celelalte două - conduce la împărţirea spaţiului în opt zone numite *triedre*.
- Distanţa de la un punct din spaţiu la *[H]* se numeşte *cotă* şi se notează cu *z,* distanţa faţă de *[V]* se numeşte *depărtare* şi se notează cu *y,* iar distanţa faţă de *[L]* se numeşte *abscisă* şi se noteaza cu *x*. Acestea sunt coordonatele unui punct şi pot avea valori pozitive sau negative în funcţie de poziţia acestuia faţă de planele de proiecţie.

- *Epura* este reprezentarea plană, convențională, a elementelor spațiale proiectate ortogonal pe planele de proiecție, reprezentare în cadrul căreia sunt utilizate numai *axele de proiecție*, *proiecțiile* elementelor respective, *notațiile* şi *liniile de ordine* corespunzătoare.
- Planele care împart cele patru diedre în părți egale se numesc *plane bisectoare*, iar cele opt zone rezultate se numesc *octanți.* Un punct aparținând unui plan bisector are cota egală cu depărtarea în valoare absolută.

MI.U1.5. Rezumat

În cadrul unității - „*Sisteme de proiecție. Reprezentarea punctului*" – s-au explicat, pentru început, sistemele de proiecție utilizate în reprezentările grafice tehnice, insistându-se asupra sistemului dublei proiecții ortogonale, sistemul utilizat în Geometria descriptivă şi în Desenul tehnic.

S-a explicat ce sunt diedrele şi triedrele.

S-au prezentat modalitățile de reprezentare în *epură* a punctelor situate în spațiu în oricare din cele patru diedre, sau în oricare din cele opt triedre ale sistemului ortogonal de proiecție. S-au prezentat, de asemenea, pozițiile particulare ale punctului (puncte situate în plane de proiecție, pe axe, în planele bisectoare sau simetrice față de planele de proiecție sau față de axe). Pentru fiecare din aceste poziții s-au ales exemple (desene spațiale şi epure) lămuritoare.

MI.U1.6. Test de evaluare a cunoştințelor

1. În ce constă dubla proiecție ortogonală?
2. În ce constă tripla proiecție ortogonală?
3. Cum se numesc distanțele de la un punct din spațiu la planele de proiecție?
4. Care este convenția de stabilire a semnelor coordonatelor?
5. Ce este epura?
6. Cum se construieşte epura unui punct după coordonatele numerice ale acestuia?
7. Să se dea coordonate (pozitive şi negative la alegere) cu valori între 0 şi 60 mm, pentru mai multe puncte şi să se construiască epurele lor.
8. Date fiind două proiecții ale unui punct, să se explice, pe o epură, cum se găseşte cea de-a treia proiecție a acestuia?
9. Ce se poate spune despre proiecțiile punctelor situate în planele bisectoare *[B_1]* şi *[B_2]* ?
10. Precizați, pe epura unui punct oarecare, care este adevărata mărime a distanței de la punctul din spațiu la axele de proiecție?

Unitatea de învățare MI.U2. Reprezentarea dreptei

Cuprins

MI.U2.1. Introducere 31
MI.U2.2. Competențe 31
MI.U2.3. Proiecțiile dreptei. 31
MI.U2.4. Urmele şi traseul dreptei 32
MI.U2.5. Rezumat..... 37
MI.U2.6. Test de evaluare a cunoştinţelor 37

MI.U2.1. Introducere

În această unitate de învățare se prezintă modul de reprezentare în epură a dreptei. Se definesc urmele dreptei şi modul de determinare a acestora pe epură. Se analizează diedrele şi triedrele pe care le poate străbate o dreaptă oarecare şi modul în care se determină acest traseu pe epură.

MI.U2.2. Competențe

La sfârşitul acestei unități de învățare cursanții vor fi capabili:

- să reprezinte proiecțiile unei drepte în epură;
- să determine urmele dreptei, respectiv, punctele de intersecție ale acesteia cu planele de proiecție;
- să determine traseul unei drepte în spațiu.

Durata medie de parcurgere a acestei unități de învățare este de 2 ore.

MI.U2.3. Proiecțiile dreptei

Proiecția ortogonală a unei drepte pe un plan de proiecție se obține intersectând planul proiectant al dreptei, perpendicular pe planul de proiecție, cu planul de proiecție. Dacă dreapta *(D)* este determinată de două puncte *A* şi *B*, atunci proiecțiile lor determină pe planele de proiecție proiecțiile dreptei *(d)*, *(d')* şi *(d'')* (fig. MI.U2.1) (se unesc proiecțiile de acelaşi nume ale punctelor). Efectuând operația de rabatere a planelor *[H]* şi *[L]* după procedeul cunoscut (planul orizontal de proiecție *[H]* se roteşte în jurul axei *(Ox)*, planul lateral de

proiecție *(L)* se rotește în jurul axei *(Oz)* până se suprapun peste planul vertical de proiecție), se obține *epura* dreptei (fig. MI.U2.2).

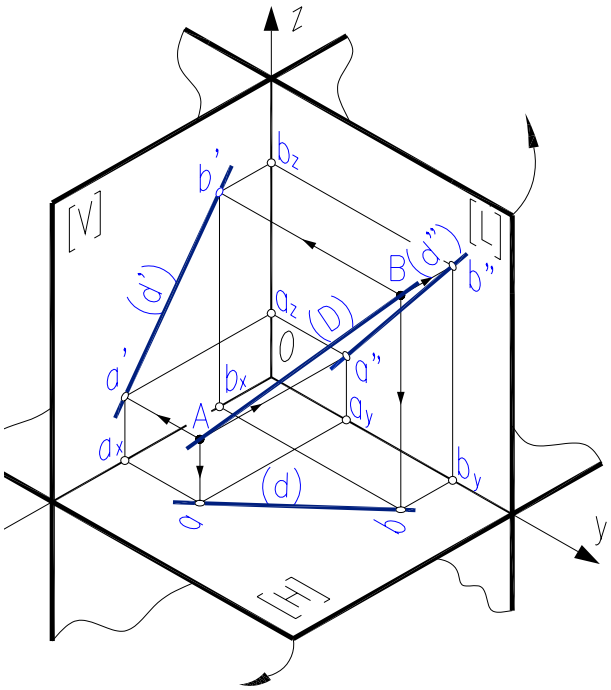


Fig. MI.U2.1

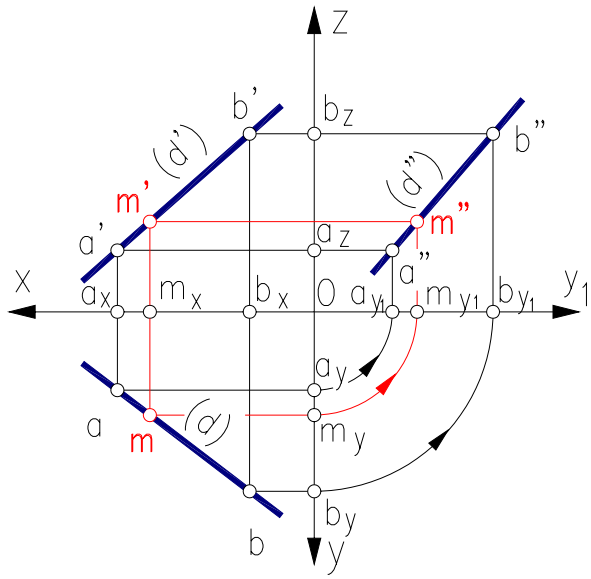


Fig. MI.U2.2

Un punct oarecare *M*, aparținînd dreptei *(D)*, își are proiecțiile pe proiecțiile de același nume ale dreptei, adică $M \in (D) \Rightarrow m \in (d);\ m' \in (d');\ m'' \in (d'')$.

Analizând condiția de apartenență a unui punct la o dreaptă reprezentată în epură, rezultă că, dacă se cunoaște o singură proiecție a acestuia, se pot determina cu ușurință celelalte două (v. fig. MI.U2.2).

Se mai poate constata că un punct *M* împarte segmentul $/AB/$ în segmente proporționale cu segmentele determinate de proiecțiile sale *m, m'* și *m''* pe proiecțiile respective ale segmentului.

MI.U2.4. Urmele şi traseul dreptei

Urmele dreptei sunt punctele în care drepta intersectează planele de proiecție (fig. MI.U2.3).

Urma orizontală H este punctul în care dreapta intersectează planul orizontal de proiecție *[H]*. Proiecțiile acestei urme sunt *h*, *h'* şi *h''*, *h* fiind confundat cu *H*.

Urma verticală V este punctul în care dreapta intersectează planul vertical de proiecție *[V]*. Proiecțiile acestei urme sunt *v*, *v'* şi *v''*, *v'* fiind confundat cu *V*.

Urma laterală L este punctul în care dreapta intersectează planul lateral de proiecție *[L]*. Proiecțiile acestei urme sunt *l*, *l'* şi *l''*, *l''* fiind confundat cu *L*.

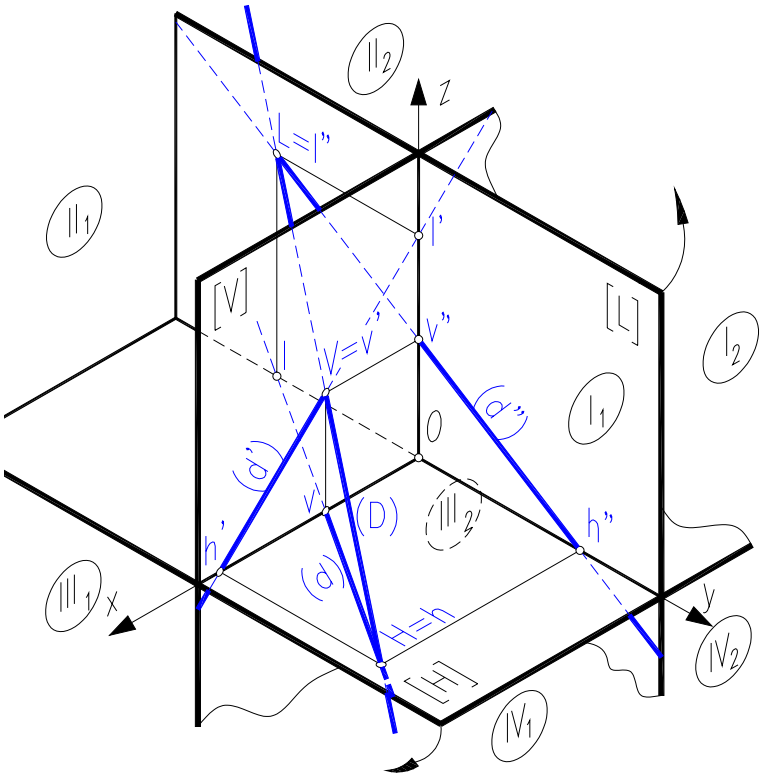


Fig. MI.U2.3

În fig. MI.U2.4 se prezintă *epura* acestei drepte cu marcarea triedrelor pe care aceasta le străbate în spațiu. Notarea acestora s-a făcut în partea de jos a epurei, iar explicațiile vor fi date în cele ce urmează..

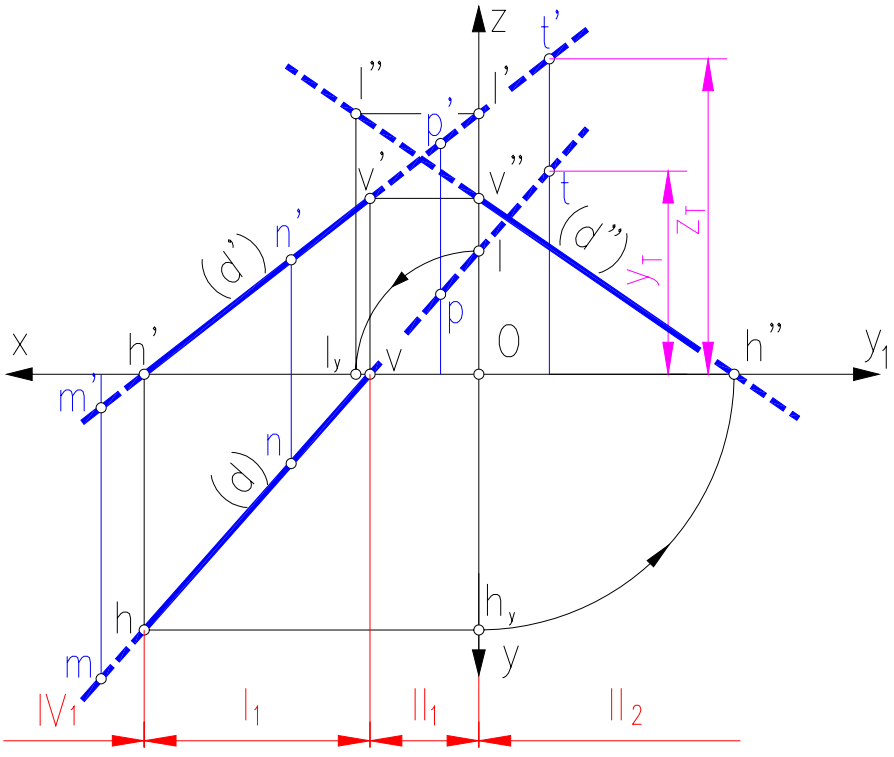


Fig. MI.U2.4

Urmele dreptei sunt puncte particulare ale acesteia, frecvent utilizate în rezolvarea problemelor de geometrie descriptivă. Fiind puncte situate în plane de proiecție, urmele dreptei au o coordonată nulă. Ca urmare, una din proiecțiile unei urme este confundată cu însăşi urma, iar celelalte două proiecții se găsesc pe două axe de coordonate.

Analizând reprezentarea spațială din fig. MI.U2.3, se constată că determinarea urmelor orizontală *H(h,h',h")* şi verticală *V(v,v',v")* ale dreptei în epură (fig. MI.U2.4), se poate face pe baza următorului raționament:

- cele două urme aparțin dreptei *(D)*, deci proiecțiile lor aparțin proiecțiilor de acelaşi nume ale dreptei;

- urma verticală *V* este un punct aparținând planului vertical de proiecție *[V],* iar urma orizontală *H* este un punct aparținând planului orizontal de proiecție *[H]*.

Rezultă că:

- pentru determinarea urmei orizontale, se prelungeşte proiecția verticală *(d')* a dreptei până la intersecția cu axa *(Ox)*, rezultând proiecția verticală a urmei orizontale *h'*. Pe linia de ordine corespunzătoare lui *h'* se obține proiecția orizontală *h* a urmei la intersecția cu proiecția orizontală *(d)* a dreptei;

- pentru determinarea urmei verticale se prelungeşte proiecția orizontală *(d)* a dreptei până la intersecția cu axa *(Ox)*, rezultând proiecția orizontală *v* a urmei verticale *V*. Pe linia de ordine corespunzătoare lui *v* se obține proiecția verticală *v'* la intersecția cu proiecția verticală *(d')* a dreptei.

Proiecțiile urmei laterale se determină astfel:

- se prelungeşte proiecția verticală *(d')* a dreptei până la intersecția cu axa *(Oz)*, rezultând proiecția verticală a urmei laterale *l'*. Pe linia de ordine paralelă la *(Ox)* corespunzătoare lui *l'* se obține proiecția laterală *l"* a urmei la intersecția cu proiecția laterală *(d")* a dreptei.

Stabilirea *traseului* dreptei *(D)* în spațiu, respectiv, stabilirea triedrelor pe care aceasta le străbate, se poate face direct pe epură. Se observă că, după intersectarea unui plan de proiecție (v. fig. MI.U2.3), dreapta trece dintr-un triedru în alt triedru. În consecință, în epură, stabilirea traseului dreptei se poate face prin analizarea semnului coordonatelor descriptive ale punctelor de pe dreaptă între urme. Aceste semne definesc triedrul în care se află punctele respective şi, evident, porțiunea respectivă a dreptei.

În epura din fig. MI.U2.4 traseul dreptei *(D)* (triedrele pe care le străbate) este ilustrat în partea inferioară a acesteia între linii de cotă. Pentru a stabili cărui triedru aparțin regiunile figurate în epură, s-au considerat punctele *M, N, P* şi *T,* aparținând fiecare altei regiuni. Coordonatele lor sunt:

$x_M > 0;\ y_M > 0;\ z_M < 0;\ \Rightarrow M \in IV_1;$

$x_N > 0;\ y_N > 0;\ z_N > 0;\ \Rightarrow N \in I_1;$

$x_P > 0;\ y_P < 0;\ z_P > 0;\ \Rightarrow P \in II_1;$

$x_T < 0;\ y_T < 0;\ z_T > 0;\ \Rightarrow T \in II_2,$

deci, dreapta străbate triedrele IV_1, I_1, II_1 şi II_2, iar în triedrele IV_1 şi II_2 continuă la infinit.

Exemple

1. Se consideră dreapta *(D)* definită de punctele *A(40,-30,10)* şi *B(-35,15,45)*. Să se construiască proiecţiile dreptei *(D)* şi proiecţiile urmelor acesteia, apoi să se i se determine traseul. Să se determine şi punctul de intersecţie cu planul bisector $[B_2]$.

Rezolvare (fig. MI.U2.5): se construiesc proiecţiile punctelor *A* şi *B*. Proiecţiile dreptei se obţin unind proiecţiile de acelaşi nume ale punctelor. Pentru determinarea proiecţiilor urmelor, se prelungesc proiecţiile orizontală şi verticală ale dreptei până intersectează axa *(Ox)*. Urmele rezultă conform raţionamentului detaliat anterior. Traseul dreptei se stabileşte analizând semnul coordonatelor descriptive ale punctelor în regiunile delimitate de urme şi de origine. Pentru determinarea celor două puncte de intersecţie cu planele bisectoare, se vor cauta acele puncte de pe dreaptă care au cota egală cu depărtarea în valoare absolută. Proiecţiile orizontală şi verticală ale punctului de intersecţie I_2 cu planul bisector $[B_2]$ sunt confundate.

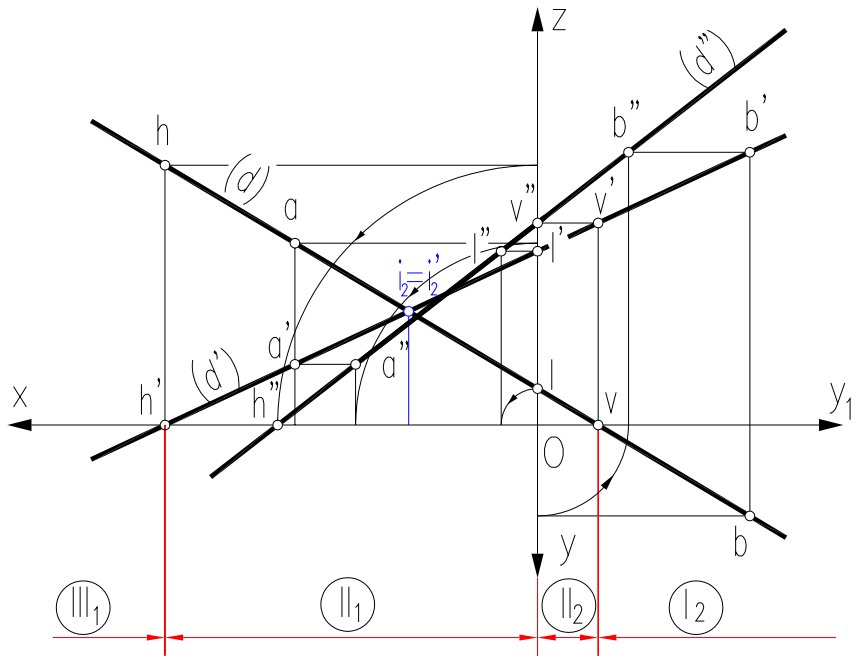


Fig. MI.U2.5

2. Se consideră dreapta $(\Delta)(\delta,\delta',\delta'')$, definită prin punctele *A(50,15,10)* şi *B(10,40,50)*. Să se construiască proiecţiile dreptei *(Δ)* şi proiecţiile urmelor acesteia; să se determine traseul dreptei *(Δ)* (fig. MI.U2.6).

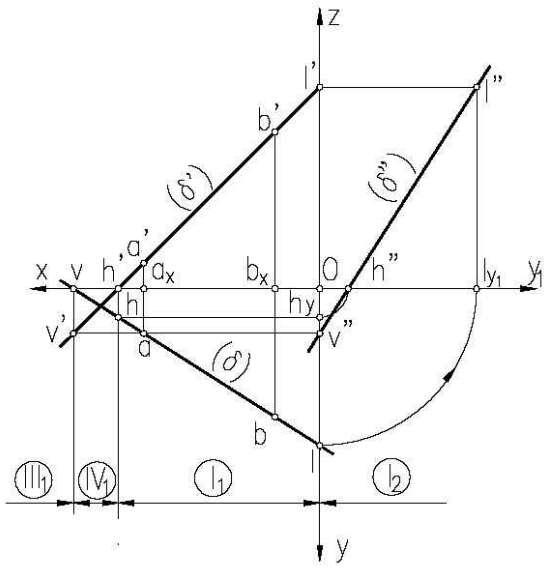


Fig. MI.U2.6

1. Se dau punctele *M(16,12,16)* şi *N(42,-15,4)*. Să se determine:
- proiecţiile dreptei *(D)* definită de aceste puncte şi urmele acesteia;
- intersecţia dreptei *(D)* cu planele bisectoare;
- traseul dreptei *(D)* în spaţiu.

Indicaţie: proiecţiile punctului de intersecţie cu planul bisector *[B_1]* se vor determina printr-o construcţie ajutatoare (o dreaptă înclinată cu acelaşi unghi faţă de axa *(Ox)* ca şi proiecţia verticală sau orizontală a dreptei, din punctul de intersecţie al acestor proiecţii cu axa).

2. Se dau punctele *A(5,5,25)* şi *B(40,15,10)*. Să se determine :
- proiecţiile dreptei *(D)* definită de aceste puncte;
- proiecţiile dreptei *(D_1)* simetrica lui *(D)* faţă de planul *[H]*;
- proiecţiile punctului *M(25,y_M,z_M)* ştiind că punctul *M* aparţine dreptei *(D)*.

3. Să se determine, pe dreapta oarecare *(Δ)(δ,δ')*, un punct *L* ale cărui coordonate descriptive satisfac relaţia $X_L = 2Z_L$ (v. fig. MI.U2.7).

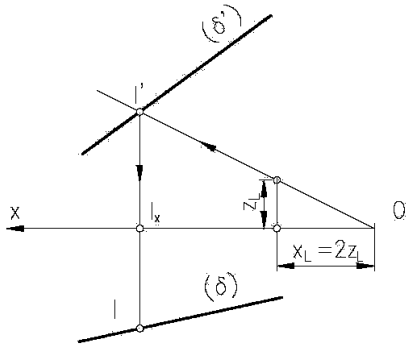


Fig. MI.U2.7

Să ne reamintim...

- O dreapta *(D)* determinată de două puncte *A* şi *B* va avea proiecţiile definite de proiecţiile acestor puncte. S-a convenit ca proiecţiile dreptei să fie notate cu litere mici încadrate de paranteze rotunde - *(d)*, *(d')* şi *(d")*.
- Urmele dreptei sunt punctele în care dreapta intersectează planele de proiecţie şi sunt denumite după planul intersectat. Astfel, urma orizontală *H* este punctul în care dreapta intersectează (înţeapă) planul *[H],* urma verticală *V* este punctul în care dreapta intersectează planul *[V],* iar urma laterală *L* este punctul în care dreapta intersectează planul *[L]*.
- Cele trei urme *H, V* şi *L* ale dreptei împart dreapta în patru elemente distincte (două segmente situate între urme şi două semidrepte), fiecare din acestea aparţinând unui singur triedru.
- Stabilirea *traseului* unei drepte în spaţiu, respectiv, stabilirea triedrelor pe care aceasta le străbate, se poate face direct pe epură prin analizarea semnului coordonatelor descriptive ale punctelor de pe dreaptă (pe proiecţiile orizontală şi verticală) între urme şi origine *O*.

MI.U2.5. Rezumat

În cadrul unităţii de învăţare „Reprezentarea dreptei" s-a prezentat modul de întocmire a *epurei* unei drepte oarecare situate în spaţiu în oricare din cele patru diedre sau cele opt triedre ale sistemului ortogonal de proiecţie. S-au definit urmele dreptei, precum şi modul de determinare pe epură a traseului dreptei în spaţiu. Pentru exemplificare s-au utilizat desene spaţiale izometrice şi s-au prezentat epurele corespunzătoare.

MI.U2.6. Test de evaluare a cunoştinţelor

1. Cum se determină proiecţiile unei drepte definită de două puncte?
2. Câte proiecţii sunt necesare pentru determinarea unei drepte din spaţiu?
3. Ce sunt urmele dreptei ?
4. Cum se determină în epură traseul dreptei din spaţiu?
5. Care este numărul maxim al triedrelor pe care le poate străbate o dreaptă?
6. Care este poziţia proiecţiilor orizontală şi verticală ale unei drepte conţinută în planul bisector $[B_1]$? Dar în $[B_2]$?

Unitatea de învățare MI.U3. Poziţiile dreptelor

Cuprins

MI.U3.1. Introducere 38
MI.U3.2. Competenţe 39
MI.U3.3. Poziţii particulare ale dreptei în raport cu planele de proiecţie. 39
MI.U3.3.1. Drepte paralele cu unul din planele de proiecţie. 39
MI.U3.3.2. Drepte perpendiculare pe unul din planele de proiecţie 41
MI.U3.3.3. Drepte conţinute în planele de proiecţie 43
MI.U3.4. Poziţii relative a două drepte 44
MI.U3.4.1. Drepte concurente 44
MI.U3.4.2. Drepte paralele 45
MI.U3.4.3. Drepte disjuncte 46
MI.U3.5. Rezumat 51
MI.U3.6. Test de evaluare a cunoştinţelor 52
Temă de control 52

MI.U3.1. Introducere

În afară de poziția oarecare a unei drepte față de planele de proiecție, aşa cum s-a văzut în cadrul unității de învațare anterioară, dreptele pot ocupa şi poziții particulare față de planele de proiecție. Astfel, acestea pot fi paralele sau perpendiculare pe unul din planele de proiecție sau pot fi conținute în aceste plane. Pe de altă parte, dacă ne referim la poziția relativă a dreptelor în spațiu, se constată ca acestea pot fi concurente sub un unghi oarecare, pot fi perpendiculare între ele, pot fi neconcurente, sau pot fi paralele între ele.

În cadrul acestei unități de învățare se analizează toate aceste drepte, se definesc proprietățile pe care la au, se întocmesc epurele şi se prezintă o serie de exemple practice.

Studierea pozițiilor particulare ale dreptelor în raport cu planele de proiecție este necesară întrucât dreptele situate în astfel de poziții sunt întâlnite frecvent în desenul tehnic sau constituie un instrument curent de lucru în rezolvarea unor probleme de geometrie descriptivă.

La sfârşitul unității se formulează şi prima temă de control a modulului I.

MI.U3.2. Competențe

După parcurgerea materialului acestei unități de învățare cursanții vor fi capabili:

- să definească dreptele perpendiculare pe unul din planele de proiecție, să descrie proprietățile acestora şi să le reprezinte în epură;
- să definească dreptele paralele cu unul din planele de proiecție, să descrie proprietățile acestora şi să le reprezinte în epură;
- să reprezinte în epură drepte concurente, disjuncte şi perpendiculare;
- să utilizeze şi să recunoască aceste drepte în cadrul unor aplicații practice.

Durata medie de parcurgere a acestei unități de învățare este de 3 ore.

MI.U3.3. Poziții particulare ale dreptei în raport cu planele de proiecție

O dreaptă se poate afla într-o poziție oarecare față de planele de proiecție, aşa cum s-a vazut în unitatea de învățare precedentă, dar poate ocupa şi poziții particulare față de aceste plane.

Dreptele aflate în poziții particulare față de planele de proiecție sunt dreptele paralele sau perpendiculare pe unul din planele de proiecție sau dreptele conținute în aceste plane. Aceste drepte sunt frecvent întâlnite în reprezentările din desenul tehnic şi constituie instrumente curente de lucru în rezolvarea multor probleme de geometrie descriptivă.

Dreptele paralele cu unul din planele de proiecție străbat trei triedre, iar cele perpendiculare pe unul din planele de proiecție, doar două triedre.

MI.U3.3.1. Drepte paralele cu unul din planele de proiecție

a. *Orizontala* (*Dreapta de nivel*) este dreapta paralelă cu planul orizontal de proiecție *[H]* (fig. MI.U3.5). Toate punctele orizontalei au aceeaşi cotă. Urmărind reprezentarea spațială (fig. MI.U3.5), precum şi *epura* (fig. MI.U3.6), se constată că orizontala prezintă următoarele proprietăți:

- nu are urmă orizontală, ci numai urmă verticală *V(v,v',v")* şi laterală *L(l,l',l")*;
- proiecția sa verticală *(o')* este paralelă cu axa *(Ox)*;
- proiecția sa laterală *(o")* este paralelă cu *(Oy)*, respectiv paralelă cu (Oy_1) în epură;
- un segment al orizontalei se proiectează în adevărată mărime pe planul orizontal *[H]* de proiecție ($|AB| \equiv |ab|$);
- unghiurile α şi β pe care le face cu planul vertical de proiecție *[V]*, respectiv cu planul lateral de proiecție *[L]*, se proiectează în adevărată mărime pe planul orizontal de proiecție *[H],* laturile unghiurilor fiind paralele cu acest plan.

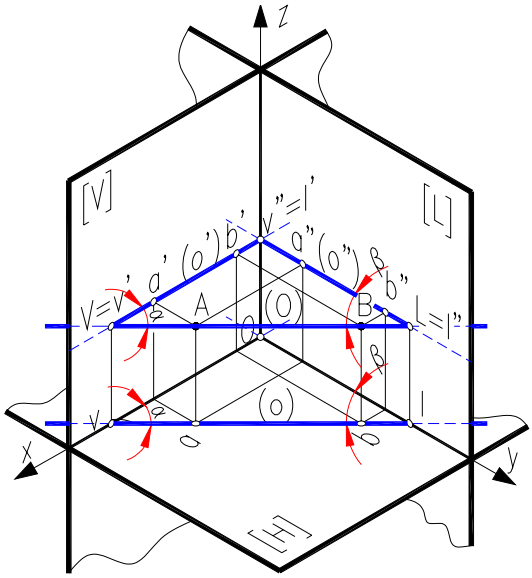


Fig. MI.U3.5

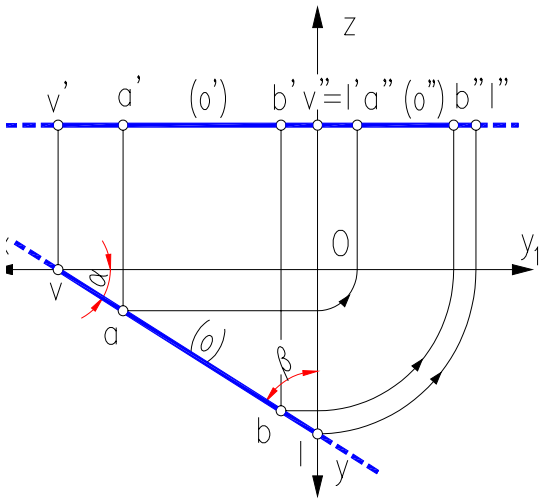


Fig. MI.U3.6

b. ***Frontala*** este dreapta paralelă cu planul vertical de proiecție *[V]* (fig. MI.U3.7). Toate punctele frontalei au aceeaşi depărtare. Urmărind reprezentarea spațială (fig. MI.U3.7), precum şi *epura* (fig. MI.U3.8), se constată că frontala prezintă următoarele proprietăți:

- nu are urmă verticală, ci numai urmă orizontală *H(h,h',h")* şi laterală *L(l,l',l")*;
- proiecția sa orizontală *(f')* este paralelă cu axa *(Oy)*;
- proiecția sa laterală *(f")* este paralelă cu *(Oz)*;
- un segment al frontalei se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical *[V]* de proiecție ($/AB/ \equiv /a'b'/$);
- unghiurile α şi β pe care le face cu planul orizontal de proiecție *[H]*, respectiv cu planul lateral de proiecție *[L]*, se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical de proiecție *[V]*, laturile unghiurilor fiind paralele cu acest plan.

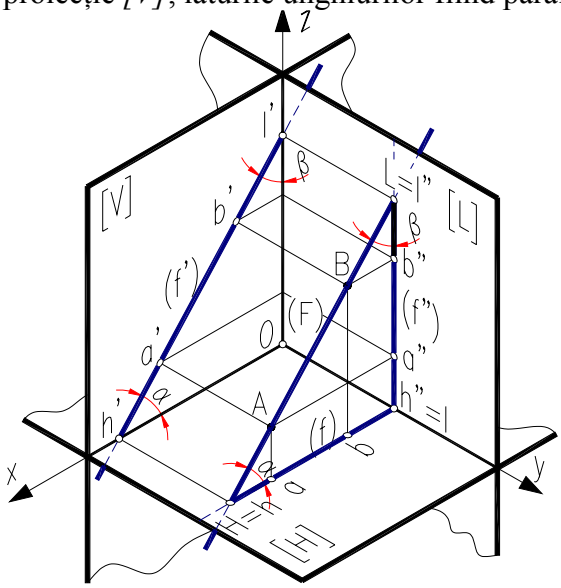


Fig. MI.U3.7

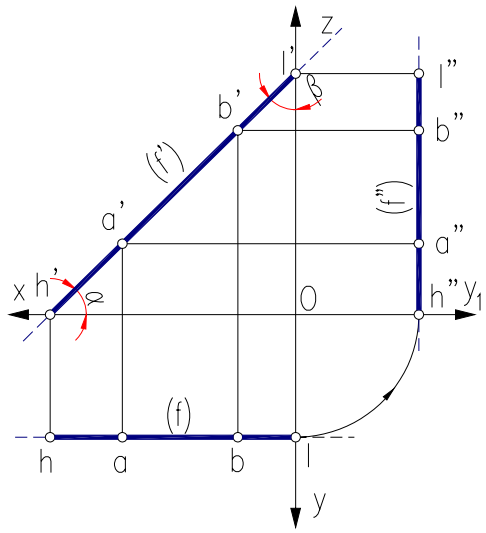


Fig. MI.U3.8

c. *Dreapta de profil* este dreapta paralelă cu planul lateral de proiecție *[L]* (fig. MI.U3.9). Toate punctele dreptei de profil au aceeaşi abscisă. Urmărind reprezentarea spațială (fig. MI.U3.9), precum şi *epura* (fig. MI.U3.10), se constată că dreapta de profil prezintă următoarele proprietăți:

- nu are urmă laterală, ci numai urmă orizontală *H(h,h',h")* şi verticală *V(v,v',v")*;
- proiecțiile sale orizontală *(d)* şi verticală *(d')* sunt perpendiculare pe axa *(Ox)*;
- un segment al frontalei se proiectează în adevărată mărime pe planul lateral *[L]* de proiecție ($/AB/ \equiv /a"b"/$);
- unghiurile α şi β pe care le face cu planul vertical de proiecție *[V]*, respectiv, cu planul orizontal de proiecție *[H]*, se proiectează în adevărată mărime pe planul lateral de proiecție *[L],* laturile unghiurilor fiind paralele cu acest plan.

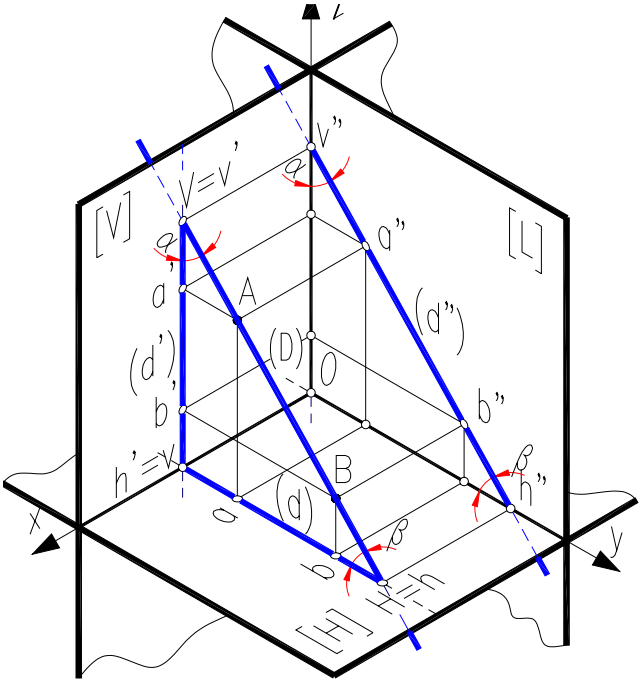


Fig. MI.U3.9 Fig. MI.U3.10

MI.U3.3.2. Drepte perpendiculare pe unul din planele de proiecție

a. *Verticala* este dreapta perpendiculară pe planul orizontal de proiecție *[H]* (Fig. MI.U3.11). Toate punctele verticalei au aceeaşi depărtare şi aceeaşi abscisă. Urmărind reprezentarea spațială (fig. MI.U3.11), precum şi *epura* (fig. MI.U3.12), se constată că verticala prezintă următoarele proprietăți:

- nu are urmă verticală şi nici laterală, ci numai urmă orizontală *H(h,h',h")*;
- proiecția sa orizontală *(d)* se reduce la un punct care coincide cu urma sa orizontală *h*;
- proiecția sa verticală *(d')* este perpendiculară pe axa (Ox), iar proiecția sa laterală este paralelă cu *(Oz)*;

- un segment al verticalei se proiectează în adevărată mărime pe planele vertical *[V]* şi lateral *[L]*, de proiecție (*/AB/ ≡/a'b'/; /AB/ ≡/a"b"/*);

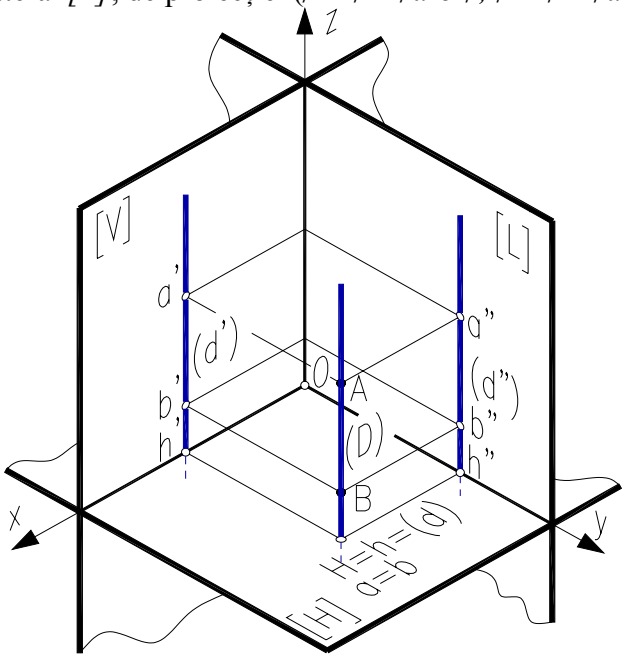


Fig. MI.U3.11

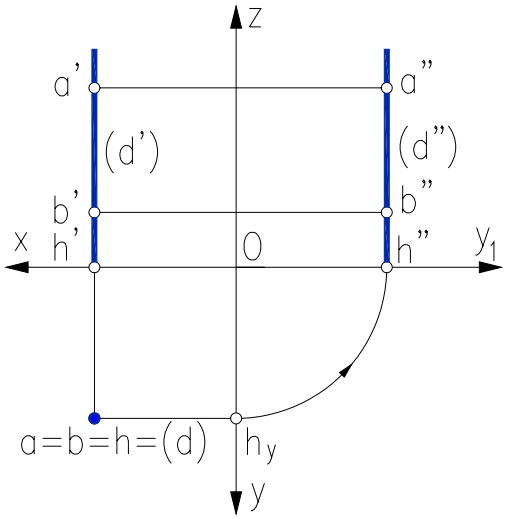


Fig. MI.U3.12

b. ***Dreapta de capăt*** este dreapta perpendiculară pe planul vertical de proiecție *[V]* (fig. MI.U3.13). Toate punctele dreptei de capăt au aceeaşi abscisă şi aceeaşi cotă. Urmărind reprezentarea spațială (fig. MI.U3.13), precum şi *epura* (fig. MI.U3.14), se constată că dreapta de capăt prezintă următoarele proprietăți:

- nu are urmă orizontală şi nici laterală, ci numai urmă verticală *V(v,v',v")*;
- proiecția sa verticală *(d')* se reduce la un punct care coincide cu urma sa verticală *v'*;
- proiecția sa orizontală *(d)* este perpendiculară pe axa (Ox), iar proiecția sa laterală este perpendiculară pe axa *(Oz)*;
- un segment al dreptei de capăt se proiectează în adevărată mărime pe planele orizontal *[H]* şi lateral *[L]*, de proiecție (*/AB/ ≡/ab/; /AB/ ≡/a"b"/*);

c. ***Fronto-orizontala*** este dreapta perpendiculară pe planul lateral de proiecție *[L]* (fig. MI.U3.15). Toate punctele fronto-orizontalei au aceeaşi depărtare şi aceeaşi cotă. Urmărind reprezentarea spațială (fig. MI.U3.15), precum şi *epura* (fig. MI.U3.16), se constată că fronto-orizontala prezintă următoarele proprietăți:

- nu are urmă orizontală şi nici verticală, ci numai urmă laterală *L(l,l',l")*;
- proiecția sa laterală *(d")* se reduce la un punct care coincide cu urma sa laterală *l"*;
- proiecția sa orizontală *(d)* este paralelă pe axa *(Ox)*, iar proiecția sa verticală este paralelă tot cu axa *(Ox)*;
- un segment al fronto-orizontalei se proiectează în adevărată mărime pe planele orizontal *[H]* şi vertical *[V]*, de proiecție (*/AB/ ≡ /ab/; /AB/ ≡ /a'b'/*);

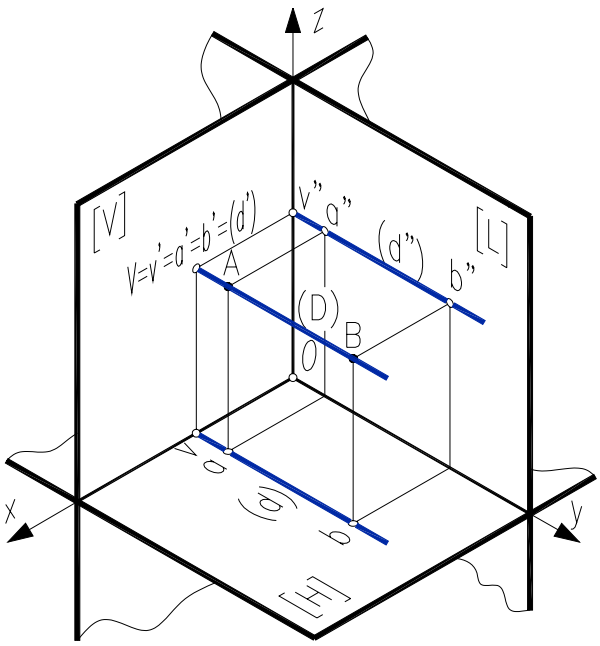


Fig. MI.U3.13

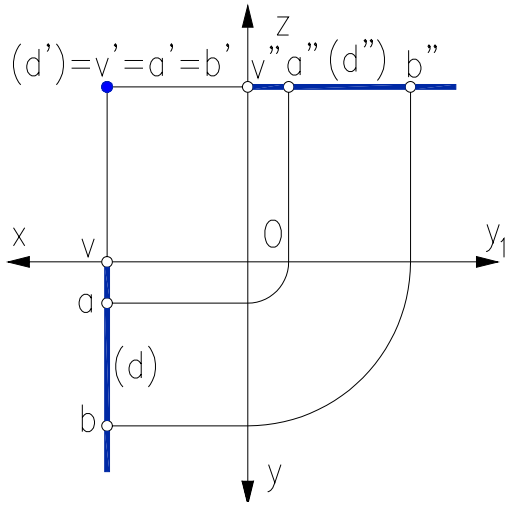


Fig. MI.U3.14

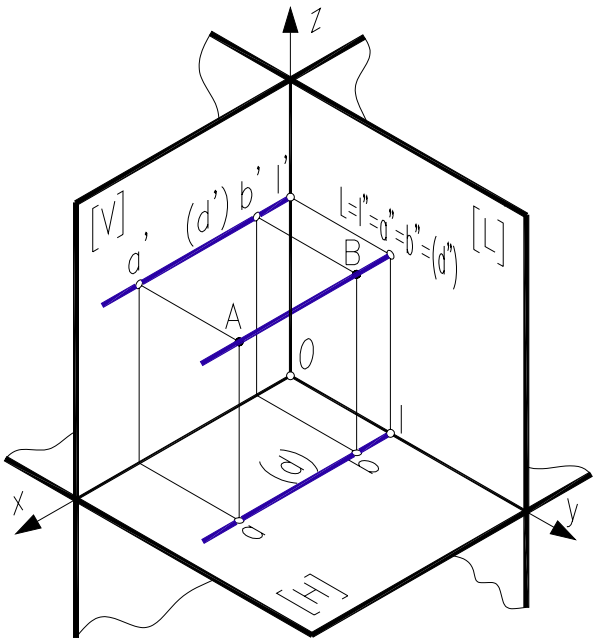


Fig. MI.U3.15

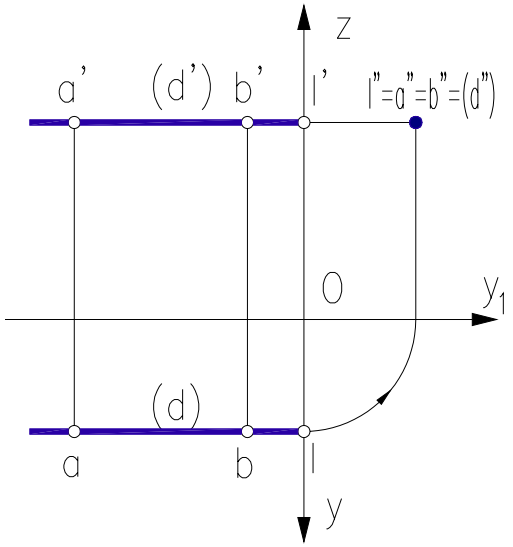


Fig. MI.U3.16

MI.U3.3.3. Drepte conținute în planele de proiecție

a. Dreapta conținută în planul orizontal de proiecție *[H]* este o orizontală de cotă zero, avînd proiecțiile: *(d') ⊂ (Ox); (d") ⊂ (Oy1)* (fig. MI.U3.17). Un segment al acestei drepte are adevărata mărime în planul *[H]* (*|AB| ≡ |ab|*).

b. Dreapta conținută în planul vertical de proiecție *[V]* este o frontală de depărtare zero, avînd proiecțiile: *(d) ⊂ (Ox); (d") ⊂ (Oz)* (fig. MI.U3.18). Un segment al acestei drepte are adevărata mărime în planul *[V]* (*|AB| ≡ |a'b'|*).

c. Dreapta conținută în planul lateral de proiecție *[L]* este o dreaptă de profil de abscisă zero, având proiecțiile: *(d) ⊂ (Oy); (d') ⊂ (Oz)* (fig. MI.U3.19). Un segment al acestei drepte are adevărata mărime în planul *[L]* (*|AB| ≡ |a"b"|*).

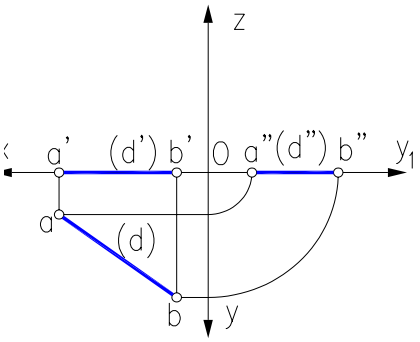


Fig. MI.U3.17

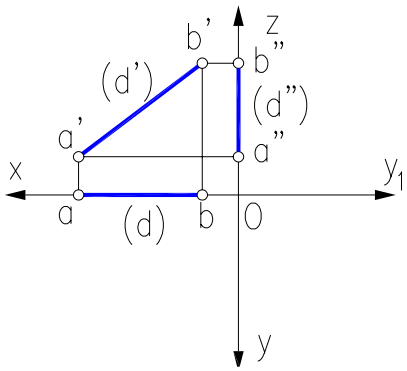


Fig. MI.U3.18

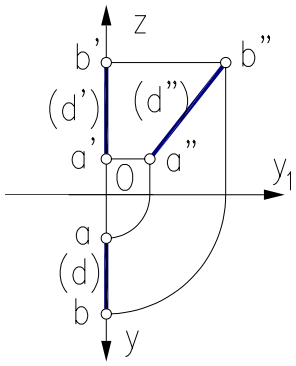


Fig. MI.U3.19

MI.U3.4. Poziții relative a două drepte

În spațiu, două drepte pot fi concurente, paralele sau disjuncte (oarecare). Dreptele concurente şi paralele sunt coplanare, dreptele disjuncte sunt necoplanare.

MI.U3.4.1. Drepte concurente

Două drepte concurente *(AB)* şi *(CD)* au un singur punct comun – punctul de concurență *I* (fig. MI.U3.20). Ştiind că, în epură, un punct aparține unei drepte dacă proiecțiile sale sunt situate pe proiecțiile de acelaşi nume ale dreptei, rezultă că proiecțiile punctului de concurență *I(i, i', i")* se află la intersecția proiecțiilor de acelaşi nume ale dreptei pe aceleaşi linii de ordine (fig. MI.U3.21).

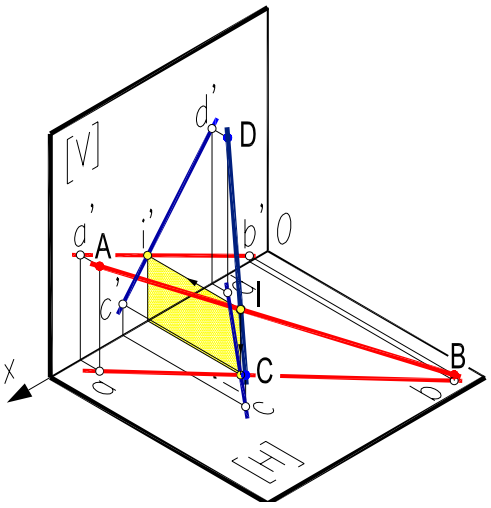


Fig. MI.U3.20

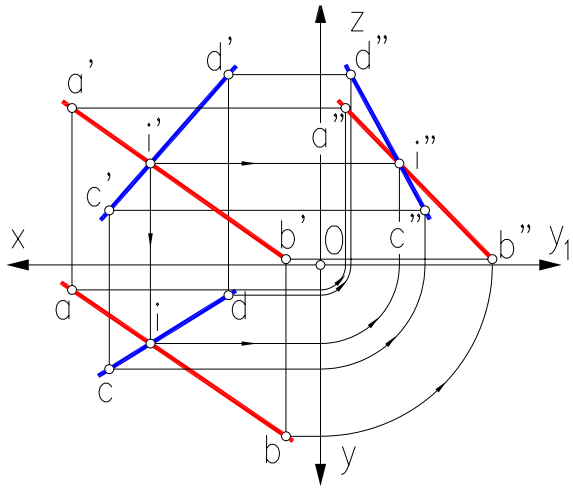


Fig. MI.U3.21

Un unghi oarecare sau drept, format de două drepte concurente, se proiectează deformat pe planele de proiecție dacă dreptele ocupă poziții oarecare în spațiu (neparalele cu planele de

proiecție). Dacă dreptele sunt paralele cu unul din planele de proiecție, atunci unghiul dintre acestea se proiectează în adevărată mărime pe acel plan.

Teoremă: ***Unghiul drept (90°) se proiectează în adevărată mărime pe un plan de proiecție dacă una din laturile unghiului este paralelă cu planul respectiv.***

Deci, dacă una din laturile unghiului este *orizontală*, *frontală* sau *dreaptă de profil*, unghiul drept format de acestea cu o dreaptă oarecare se proiectează în adevărată mărime pe planul orizontal, respectiv pe planul vertical sau lateral de proiecție.

În fig. MI.U3.22 se prezintă, spațial, în diedrul I, proiecția unghiului drept format de o orizontală şi o dreaptă oarecare, iar în fig. MI.U3.23 se prezintă epura completă a acestor drepte (şi cu figurarea proiecției laterale).

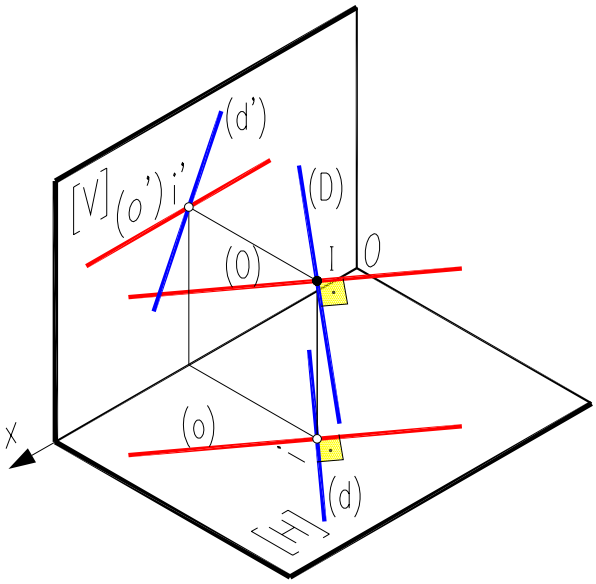


Fig. MI.U3.22

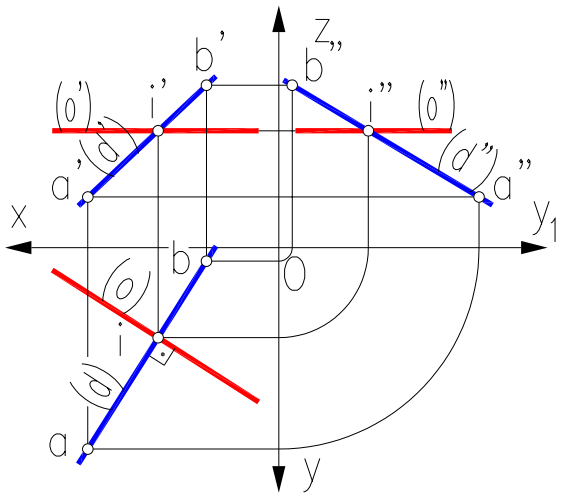


Fig. MI.U3.23

MI.U3.4.2. Drepte paralele

Două drepte paralele au proiecțiile de acelaşi nume paralele între ele. Această afirmație se poate demonstra cu uşurință, construind planele proiectante ale celor două drepte, plane care intersectează planele de proiecție după drepte paralele reprezentate spațial în fig. MI.U3.24.

În fig. MI.U3.25 se prezintă *epura* celor două drepte paralele *(D_1)* şi *(D_2),* considerând şi proiecțiile laterale.

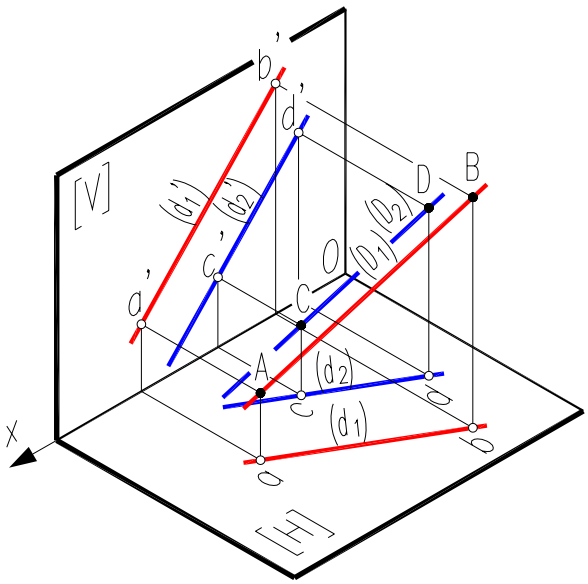


Fig. MI.U3.24

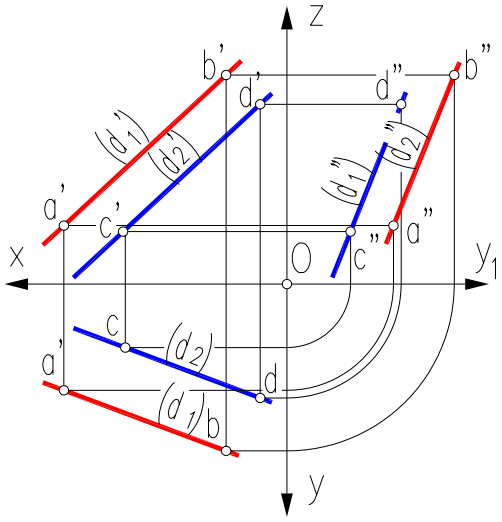


Fig. MI.U3.25

Reciproc, dacă proiecțiile de același nume a două drepte sunt paralele, atunci dreptele sunt paralele.

MI.U3.4.3. Drepte disjuncte (oarecare)

Dreptele disjuncte sau oarecare sunt dreptele care nu se întâlnesc în spațiu. Aceste drepte sunt neconcurente și neparalele, fiind conținute în plane diferite. Aceste drepte pot avea proiecțiile de același nume concurente, dar punctele de concurență nu se situează pe aceeași linie de ordine (fig. MI.U3.26 – reprezentare spațială și fig. MI.U3.27 - epură).

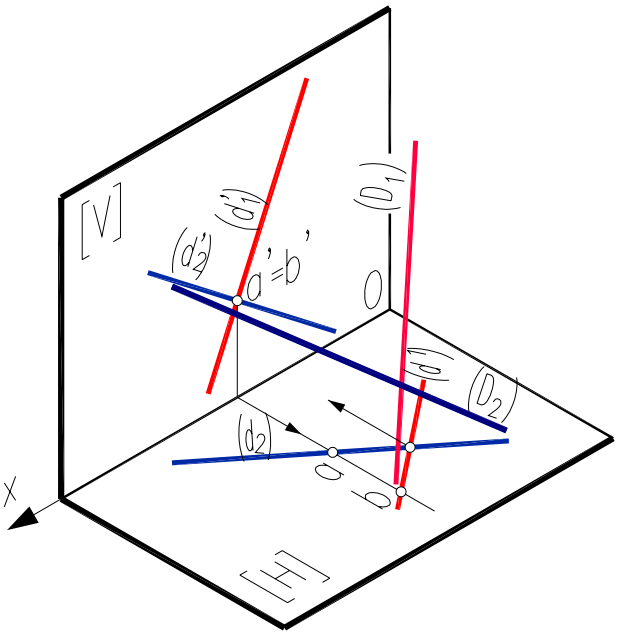


Fig. MI.U3.26

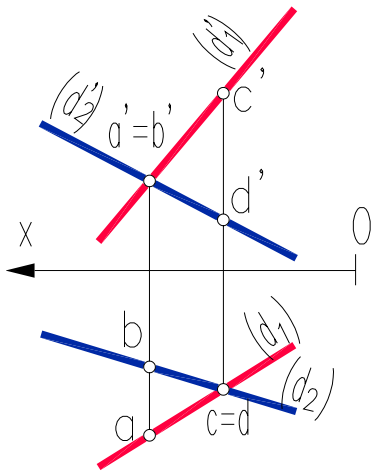


Fig. MI.U3.27

Exemple

1. Se consideră dreapta *(D)* definită de punctele *A(50,35,15)* şi *B(20,0,-5)*. Să se construiască prin punctul *M(25,-10,-15)* următoarele drepte: o frontală *(F)* concurentă cu *(D)*, o orizontală *(O)* concurentă cu *(D)* şi o dreaptă *(Δ)* paralelă la *(D)*.

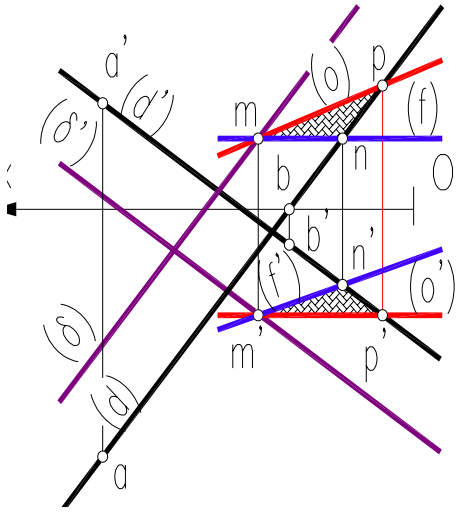


Fig. MI.U3.28

Rezolvare (fig. MI.U3.28): se construiesc proiecţiile dreptei *(D)* şi ale punctului *M*. Prin *m* se duce *(f)* //*(Ox)*. La intersecţia acestei paralele *(f)* cu *(d)* rezultă proiecţia orizontală *n* a punctului de concurenţă cu dreapta *(D)*. Pe linia de ordine dusă din *n* la intersecţia cu *(d')* rezultă proiecţia verticală *n'* a punctului *N* de concurenţă. Se uneşte *m'* cu *n'* si se obţine proiecţia verticală *(f')* a frontalei. Se observă că, în această poziţie, frontala se află în triedrul III_1.

În mod analog, ţinând cont de proprietăţile orizontalei şi de condiţia de concurenţă, se determină intersecţia orizontalei cu dreapta *(D)*. Proiecţiile paralelei *(Δ)* la *(D)* se construiesc prin *M(m, m')* paralele cu proiecţiile dreptei.

2. Fiind dat punctul *A(35,0,0)*, să se reprezinte proiecţiile cubului $[ABCDA_1B_1C_1D_1]$ (fig. MI.U3.29) de latură *l = 40 mm*, cu baza *[ABCD]* situată în planul orizontal de proiecţie *[H]* şi cu muchia $/AA_1/$ conţinută în planul vertical de proiecţie *[V]* şi muchia $/DD_1/$ conţinută în planul lateral de proiecţie *[L]*.

Să se precizeze ce fel de drepte sunt muchiile $/BB_1/$, $/CC_1/$, $/A_1B_1/$, $/B_1C_1/$, $/C_1D_1/$ şi $/D_1A_1/$.

Rezolvare (fig. MI.U3.30): se construiesc proiecţiile punctului *A*. Pentru determinarea proiecţiei orizontale *d* a punctului *D,* se duce un arc de cerc de rază *40mm* cu centrul în *a*. Se construieşte proiecţia orizontală *[abcd]* a pătratului bazei, punctele *A, B, C* şi *D* fiind conţinute în planul orizontal de proiecţie *[H]*. Se construiesc proiecţiile muchiilor $/AA_1/$, $/BB_1/$, $/CC_1/$ şi $/DD_1/$, acestea fiind *drepte verticale*. Muchiile $/A_1B_1/$, $/B_1C_1/$, $/C_1D_1/$ şi $/D_1A_1/$ sunt segmente de *drepte orizontale*. Muchiile $/AA_1/$, $/DD_1/$ sunt acoperite în proiecţie verticală, respectiv laterală.

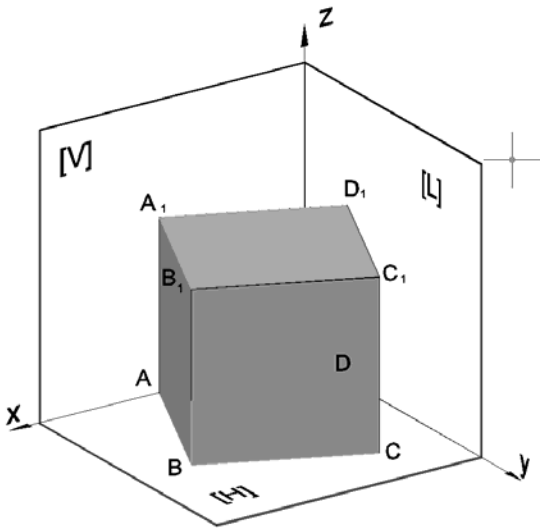


Fig. MI.U3.29

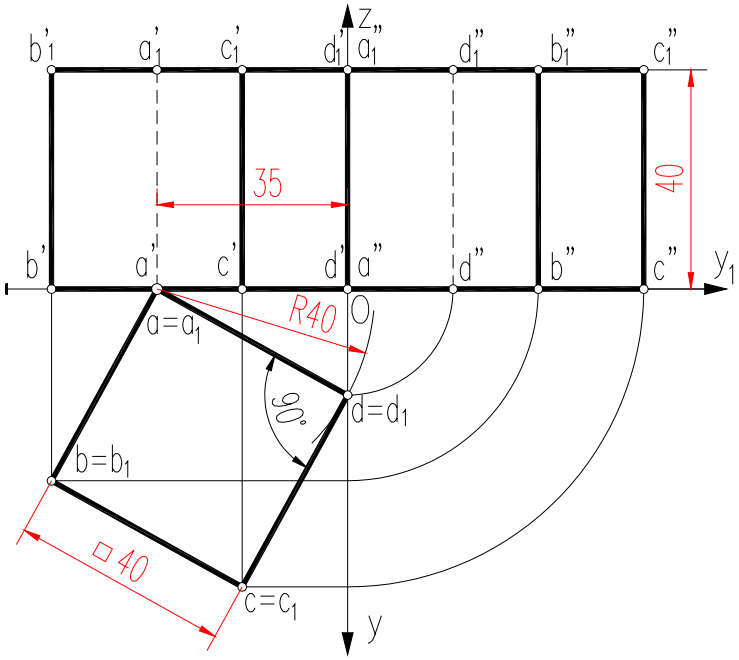


Fig. MI.U3.30

3. Se consideră dreapta *(D)* definită de punctele *A(30,45,55)* şi *B(55,25,40)*. Să se construiască prin punctul *M(10,30,30)* o dreaptă perpendiculară pe *(D)*.

Rezolvare (fig. MI.U3.31): prin *M* se construiesc orizontala *(O)(o,o')* şi frontala *(F)(f,f')* concurente cu *(D)* în *N(n,n')*, respectiv *P(p,p')*. În triunghiul *MNP* astfel obținut, se construiesc înălțimile *(NN_1)* şi *(PP_1)* concurente în *Φ(φ,φ')* – ortocentrul triunghiului (se aplică teorema unghiului drept). Unind *M(m,m')* cu *Φ(φ,φ')*, se obține a treia înălțime din triunghi, respectiv, perpendiculara căutată, concurentă în M_1 cu *(D)*.

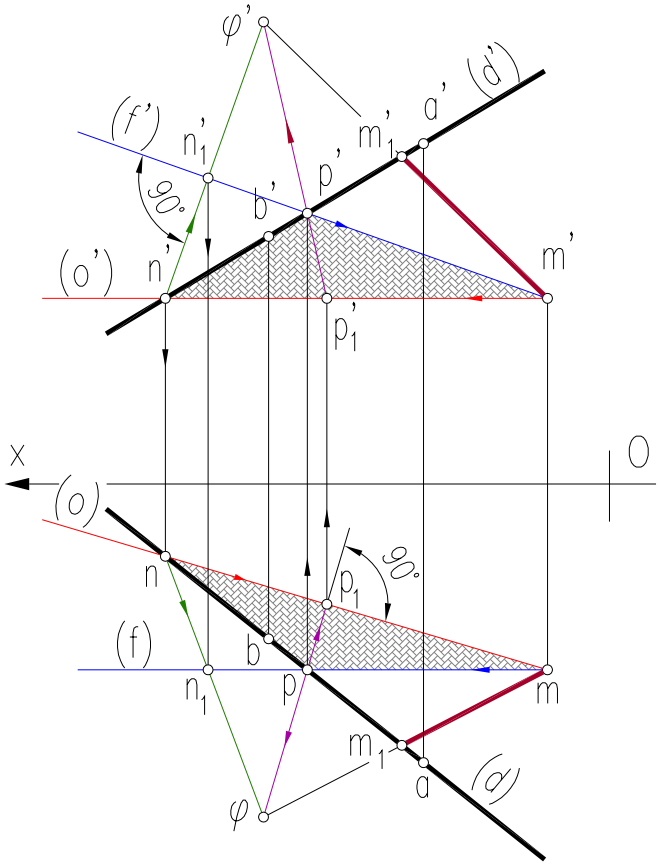


Fig. MI.U3.31

4. Se consideră orizontala *(O)* definită de punctele *A(20,15,30)* şi *B(95,55,30)* şi un punct exterior acesteia *M(75,5,60).* Să se construiască epura unui triunghi isoscel *MNP*, cu latura $/MN/ = 60\ mm$ aparţinând orizontalei *(O)*. Să se găsească apoi punctul de intersecţie al orizontalei *(O)* cu planul bisector $[B_1]$. Să se precizeze şi traseul orizontalei în spaţiu.

Rezolvare (fig. MI.U3.32): conform teoremei unghiului drept, acest unghi se proiectează în acest caz în adevărată mărime pe planul orizontal de proiecţie. Deci, din punctul *M(m,m')* se construieşte perpendiculara $/MT/$ pe orizontala *(O)*, respectiv, $/mt/ \perp /ab/$.

Se măsoară, în proiecţie orizontală, segmentul $/np/ = 60$, *t* fiind situat la mijlocul acestuia.

Intersecţia cu planul bisector $[B_1]$ se determină construind o linie ajutătoare simetrică lui *(o)* faţă de axa *(Ox)*. La intersecţia cu *(o')* rezultă i_1' proiecţia verticală a punctului de intersecţie, iar pe aceeaşi linie de ordine rezultă i_1 proiecţia orizontală. S-a impus, astfel, ca punctul I_1 să aibă cota egală cu depărtarea, deci să aparţină bisectorului $[B_1]$. O altă variantă consta în trasarea unei paralele la *(Ox)* la distanţa de 30, sub axă, obţinând astfel, proiecţia orizontală i_1 şi apoi cea verticală i_1'.

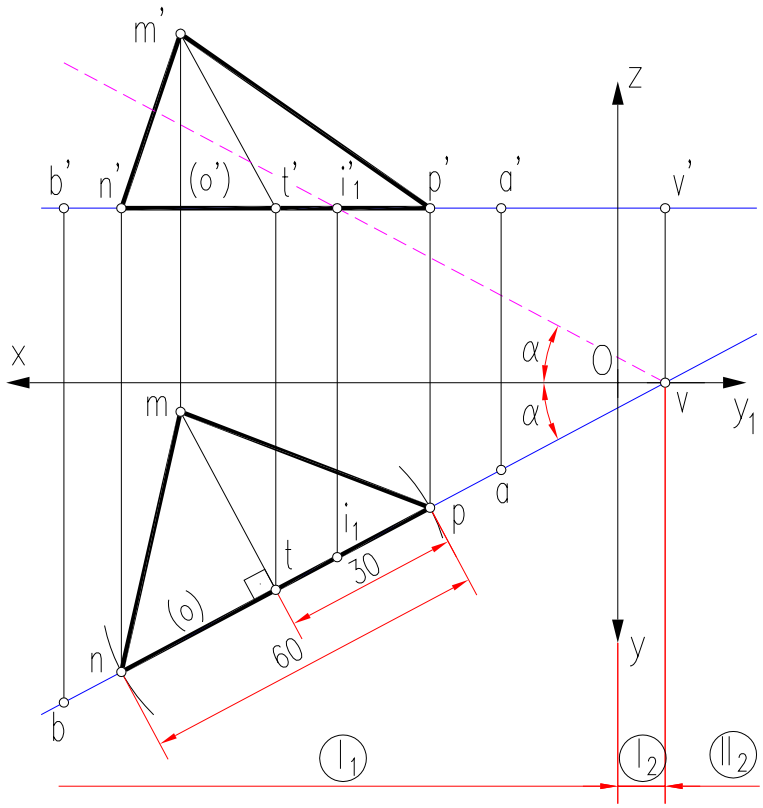


Fig. MI.U3.32

Traseul orizontalei se obține analizând semnul coordonatelor descriptive ale punctelor acesteia în regiunile delimitate de urma verticală *V(v,v')* şi origine *O*. Se remarcă faptul ca orizontala străbate doar trei triedre.

1. Se consideră dreapta *(D)* determinată de punctele *A(20,50,55)* şi *B(65,25,20)* şi punctul *M(45,10,10)* exterior dreptei. Să se construiască prin punctul *M* o orizontală concurentă cu dreapta *(D)*, o frontală concurentă cu dreapta *(D)* şi o dreaptă (D_1) paralelă cu dreapta *(D)*.

2. Să se construiască proiecțiile cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu baza *[ABCD]* inclusă în planul orizontal de proiecție *[H],* cunoscând punctele *A(25,0,0)* şi *B(0,35,0)*. Să se precizeze ce fel de drepte sunt muchiile cubului.

3. Să se ducă prin punctul *M(15,20,10)* o dreaptă *(Δ)* perpendiculară pe dreapta *(D)* determinată de punctele *A(20,35,45)* şi *B(45,15,20)*.

4. Se dau punctele *A(120,60,50), B(55,60,10)* şi *C(90,20,10)*. Să se determine centrul cercului circumscris triunghiului *ABC*.

5. Să se construiască proiecțiile *ΔABC*, dreptunghic în *A(50,20,30)*, la care cateta *//AB//=30mm* este situată pe o orizontală înclinată la *45°* față de *[V]*, iar cateta *//AC//=20mm* este situată pe o verticală.

8. Fie dreapta *(D)(d,d',d'')* definită prin punctele *A(30,50,20)* şi *B(80,20,50)*. Prin punctul $N(40,y_N,z_N)$, situat pe *(D),* să se construiască dreapta de profil (D_1)

perpendiculară pe *(D)*. Să se determine urmele dreptelor *(D)* şi *(D_1)*; să se afle punctele de intersecție ale dreptei *(D)* cu planele bisectoare *[B_1]* şi *[B_2]*.

Să ne reamintim...

- Se disting două categorii de drepte particulare: drepte paralele cu unul din planele de proiecție şi drepte perpendiculare pe unul din planele de proiecție.
- Dreapta paralelă cu planul vertical de proiecție se numeşte *frontală*. Un segment al frontalei se proiectează în adevărată mărime pe planul vertical de proiecție;
- Dreapta paralelă cu planul orizontal de proiecție se numeşte *orizontală*. Un segment al orizontalei se proiectează în adevărată mărime pe planul orizontal de proiecție;
- Dreapta paralelă cu planul lateral de proiecție se numeşte *dreaptă de profil*. Un segment al dreptei de profil se proiectează în adevărată mărime pe planul lateral de proiecție;

- *Verticala* este dreapta perpendiculară pe planul orizontal de proiecție. Se proiectează în adevărată marime pe planele *[V]* şi *[L],* proiecția orizontală se reduce la un punct;
- *Dreapta de capăt* este dreapta perpendiculară pe planul vertical de proiecție. Se proiectează în adevărată marime pe planele *[H]* şi *[L],* proiecția verticală se reduce la un punct;
- *Fronto-orizontala* este drepta perpendiculară pe planul lateral de proiecție. Se proiectează în adevărată marime pe planele *[H]* şi *[V],* proiecția laterală se reduce la un punct;
- Două drepte concurente în spațiu au în epură proiecțiile de acelaşi nume de asemenea concurente, iar punctele de concurență ale acestora se găsesc pe aceleaşi linii de ordine.
- Dreptele paralele au în epură proiecțiile de acelaşi nume, de asemenea, paralele.
- Unghiul drept (90°) se proiectează în adevărată mărime pe un plan de proiecție dacă una din laturile unghiului este paralelă cu planul respectiv.
- Dreptele oarecare (disjuncte) nu se intersectează în spațiu. Două drepte oarecare au proiecțiile de acelaşi nume concurente, dar punctele de concurență ale acestora nu sunt situate pe aceeaşi linie de ordine.

MI.U3.5. Rezumat

În cadrul unității de învățare *„Pozițiile dreptelor”* s-au definit, s-au identificat proprietățile şi s-au reprezentat în epură următoarele drepte:

- dreptele perpendiculare pe unul din planele de proiecție – verticala, dreapta de capăt şi fronto-orizontala;
- dreptele paralele cu unul din planele de proiecție – orizontala, frontala şi dreapta de profil;
- dreptele conținute în planele de proiecție;
- dreptele concurente, disjuncte şi perpendiculare;

Explicațiile au fost însoțite de desene spațiale izometrice.

S-au prezentat epurele corespunzătoare şi o serie de aplicații practice.

MI.U3.6. Test de evaluare a cunoştințelor

1. Cum se numesc dreptele paralele cu unul din planele de proiecție şi ce proprietăți au?

2. Cum se numesc dreptele perpendiculare pe unul din planele de proiecție şi ce proprietăți au?

3. Ce proprietăți au dreptele conținute în planele de proiecție?

4. În ce situație unghiul drept format de două drepte perpendiculare se proiectează în adevărată mărime pe unul din planele de proiecție?

5. Ce condiție trebuie să îndeplinească în epură proiecțiile a două drepte concurente?

6. Ce condiții trebuie să îndeplinească în epură două drepte paralele?

Temă de control

1. Se consideră dreapta *(D)* definită de punctele *A(-30,55,25+n)* şi *B(100,-65,-12)*.

a) Să se construiască proiecțiile dreptei *(D)*, proiecțiile urmelor acesteia, apoi să se i se determine traseul în spațiu.

b) Prin punctul *M (0,10,40)* să se construiască o dreaptă orizontală concurentă în punctul *N* cu dreapta *(D)*.

c) Să se precizeze lungimea segmentului $/MN/$.

d) Prin punctul *P(90,30,30)* să se construiască dreapta *(Δ)* paralelă cu *(D)*.

- Rezolvarea temei se va face pe un format A3, liniat, în creion, cu instrumente de desen.
- *"n"* reprezintă numărul de ordine al studentului în catalog.
- Tema de control se va preda la data anunțată.

Modulul 2. Reprezentarea planului. Metodele geometriei descriptive

Cuprins

Introducere 53
Competențe 54
MII.U1. Reprezentarea planului 55
MII.U2. Poziţiile planelor şi a dreptelor faţă de plane 66
MII.U3. Metodele geometriei descriptive I 84
MII.U4. Metodele geometriei descriptive II 98

Introducere

În acest modul se analizează, la început, modalitățile de reprezentare în epură a diferitelor plane – plane oarecare şi plane particulare (paralele sau perpendiculare pe planele de proiecție). Sunt detaliate reprezentările planelor prin urme (dreptele lor de intersecție cu planele de proiecție), intersecția lor, dreptele conținute în aceste plane şi proprietățile planelor particulare şi ale dreptelor sau figurilor conținute în aceste plane. Sunt prezentate, de asemenea, pozițiile relative ale dreptelor oarecare sau ale dreptelor particulare față de planele respective (intersecție, paralelism, perpendicularitate). Capitolul se încheie cu aplicații rezolvate, semnificative domeniului analizat.

În continuare sunt prezentate o serie de tehnici de lucru deosebit de utile în rezolvarea problemelor de geometrie descriptivă.

Se ştie că, dacă un element geometric spațial (dreaptă, figură plană, unghi) se găseşte într-o poziție particulară față de planele de proiecție, atunci una sau chiar două dintre proiecțiile sale reprezintă adevărata mărime a elementului respectiv. Astfel, lungimea unui segment de dreaptă orizontală poate fi măsurată în epură pe proiecția sa orizontală, lungimea unui segment de dreaptă verticală poate fi măsurată în epură pe proiecțiile sale verticală şi laterală etc. De foarte multe ori însă, elementul geometric spațial ocupă o poziție oarecare față de planele de proiecție proiectându-se deformat pe aceste plane. Dacă se doreşte, totuşi, aflarea mărimii reale a acestor elemente în epură, sau aflarea unor distanțe, sau a unor unghiuri în adevărată mărime etc., acest lucru se poate realiza cu uşurință prin apelarea la o serie de tehnici speciale pe care le oferă

geometria descriptivă, tehnici numite *„Metodele geometriei descriptive”*. Acestea sunt: *metoda schimbării planelor de proiecție* şi *metoda rotației* (cu cazul său particular - *rabaterea*) .

Competențe

La sfârşitul acestui modul cursanții vor fi capabili să:

- reprezinte în epură plane oarecare sau plane în poziții particulare;
- reprezinte în epură plane aflate în diferite poziții relative şi figuri aflate în aceste plane;
- determine intersecția planelor între ele şi să stabilească poziția relativă (paralelism, intersecție, perpendicularitate) a unor drepte sau a altor figuri geometrice față de aceste plane;
- rezolve intersecția unei drepte cu un plan sau a unor figuri geometrice între ele;
- reprezinte diverse figuri sau obiecte spațiale în trei proiecții ortogonale;
- definească tehnicile de lucru oferite de metodele geometriei descriptive referitoare la elementele de bază ale geometriei: punct, dreaptă, plan;
- utilizeze metoda schimbării planelor de proiecție pentru punct şi dreaptă;
- utilizeze metoda rotației pentru punct şi dreaptă;
- utilizeze metoda rabaterii planelor oarecare şi a planelor proiectante;
- readucă figuri plane în plane date, prin ridicare din rabatere;
- determine cu exactitate adevărata mărime a unor segmente de dreaptă, a unor figuri plane şi elementele relaționale spațiale dintre acestea, cum ar fi unghiurile dintre acestea, distanțele, vizibilitatea etc.

Unitatea de învățare MII.U1. Reprezentarea planului

Cuprins

MII.U1.1. Introducere 55
MII.U1.2. Competențe 55
MII.U1.3. Urmele planului 56
MII.U1.4. Dreapta şi punctul conținute în plan 57
MII.U1.5. Determinarea urmelor planului 57
MII.U1.6. Drepte particulare ale planului 59
MII.U1.6.1. Orizontalele unui plan 59
MII.U1.6.2. Frontalele unui plan 59
MII.U1.6.3. Dreptele de profil ale unui plan 61
MII.U1.6.4. Dreptele de cea mai mare pantă ale unui plan 61
MII.U1.7. Rezumat 64
MII.U1.8. Test de evaluare a cunoştințelor 65

MII.U1.1. Introducere

Spre deosebire de punct şi dreaptă, planul nu poate fi reprezentat prin proiecțiile sale întrucât acestea se confundă cu planele de proiecție. Ca urmare, reprezentarea planului în epură se face prin următoarele elemente:

- trei puncte necoliniare;
- o dreaptă şi un punct exterior acesteia;
- două drepte concurente (în particular – urmele planului);
- două drepte paralele.

În cadrul acestei unități de învățare se definesc reprezentările planelor prin urme, respectiv dreptele lor de intersecție cu planele de proiecție. Se explică condițiile ca o dreaptă sau un punct să aparțină unui plan. Se definesc dreptele particulare ale planului şi proprietățile acestora.

MII.U1.2. Competențe

După parcurgerea materialului acestei unități de învățare studenții vor fi capabili:

- să reprezinte în epură diferite plane;
- să determine urmele unui plan definit prin drepte oarecare sau particulare, concurente sau paralele;

- să reprezinte în epură dreptele particulare ale planului şi să definească proprietăţile acestora.
- să construiască puncte, drepte sau figuri geometrice care să fie conţinute în aceste plane;
- să utilizeze plane şi drepte incluse în aceste plane în cadrul unor aplicaţii practice.

Durata medie de parcurgere a acestei unităţi de învăţare este de 2 ore.

MII.U1.3. Urmele planului

Aşa cum s-a precizat anterior, reprezentarea planului în epură se poate face prin proiecţiile elementelor sale definitorii, sau, frecvent, prin cazul particular al dreptelor de intersecţie ale sale cu planele de proiecţie, drepte numite *urmele planului*. Un plan oarecare *[P]* va avea trei urme: *urma orizontală (Ph), urma verticală (Pv)* şi *urma laterală (Pl)* (fig. MII.U1.1). În fig. MII.U1.2 este reprezentată epura planului oarecare *[P]* dat prin urme.

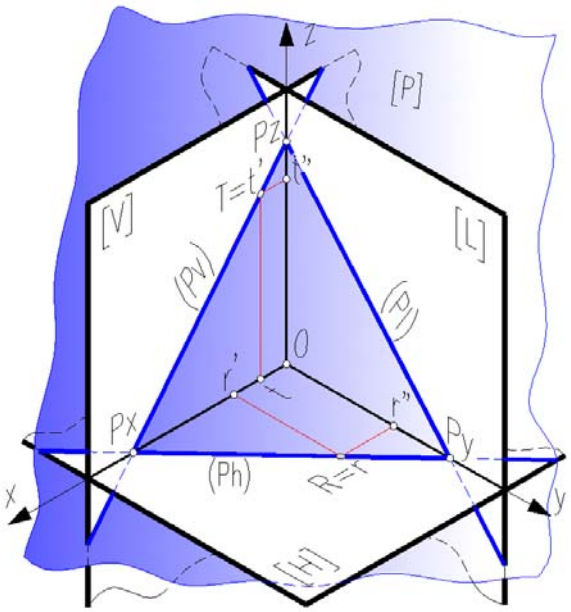


Fig. MII.U1.1

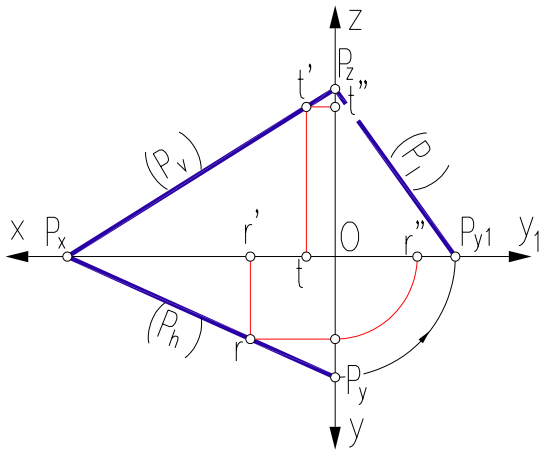


Fig. MII.U1.2

Se constată că urmele planului sunt concurente două câte două pe axele de proiecţie în punctele P_x, P_y, P_z. Urmele sunt drepte conţinute în planele de proiecţie. În fig. MII.U1.1 (reprezentare spaţială) şi fig. MII.U1.2 (epură) sunt figurate şi două puncte aparţinând acestor drepte: $R \in (P_h)$; $(P_h) \subset [H]$; $T \in (P_v)$; $(P_v) \subset [V]$.

De foarte multe ori, în rezolvarea problemelor este suficientă reprezentarea planului doar prin două din urmele sale - orizontală *(P_h)* şi verticală *(P_v)*.

MII.U1.4. Dreapta şi punctul conținute în plan

O dreaptă este conținută într-un plan dacă cel puțin două puncte ale sale sunt conținute în planul respectiv. Când planul este reprezentat prin urme, o dreaptă din acest plan işi va avea urmele pe urmele planului (fig. MII.U1.3)

Deci, *o dreaptă este inclusă într-un plan dacă urmele sale se găsesc pe urmele de acelaşi nume ale planului* (fig. MII.U1.3 – reprezentare spațială; fig. MII.U1.4 – epură).

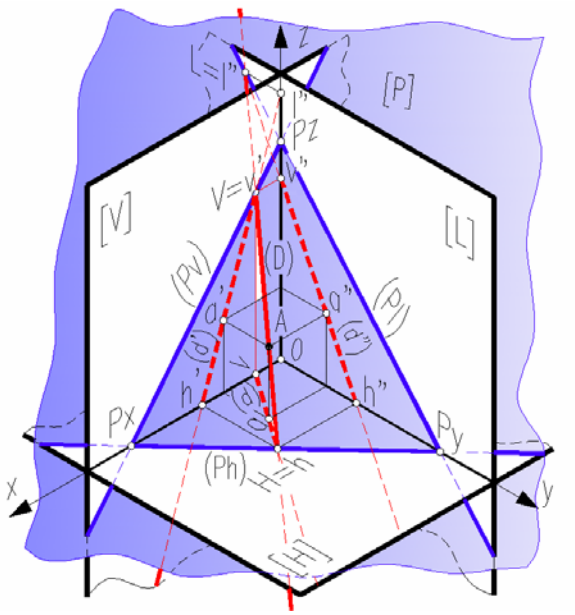


Fig. MII.U1.3

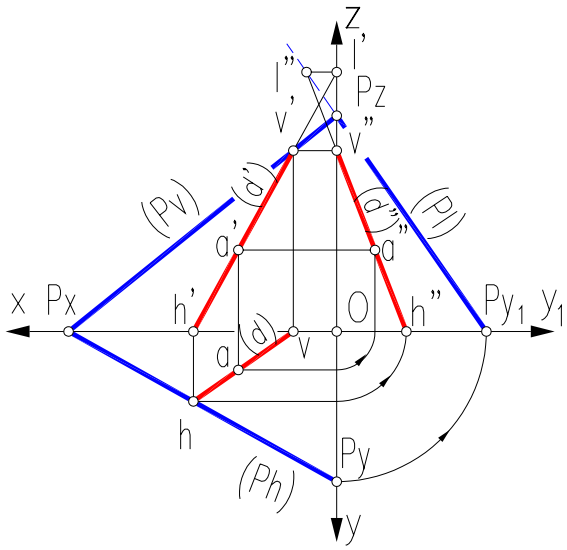


Fig. MII.U1.4

Un punct *A* conținut într-un plan *[P]* se va găsi în mod obligatoriu pe una din dreptele planului. Rezultă că, *pentru a construi în epură un punct care să aparțină unui plan [P] dat prin urme, este necesar ca proiecțiile acestui punct să se găsească pe proiecțiile unei drepte (D) ce aparține planului* (v. fig. MII.U1.3 şi fig. MII.U1.4).

MII.U1.5. Determinarea urmelor planului

Pornind de la constatarea că o dreaptă *(D)* conținută într-un plan *[P]* îşi are urmele pe urmele de acelaşi nume ale planului, rezultă că, fiind date două drepte concurente sau două drepte paralele, *determinarea urmelor planelor formate de aceste drepte se face cu uşurință prin unirea urmelor de acelaşi nume ale dreptelor respective.*

În fig. MII.U1.5 (reprezentare spațială) şi în fig. MII.U1.6 (epură) se prezintă determinarea urmelor planului *[P]* format de două drepte *(D_1)* şi *(D_2)* concurente în punctul *M*.

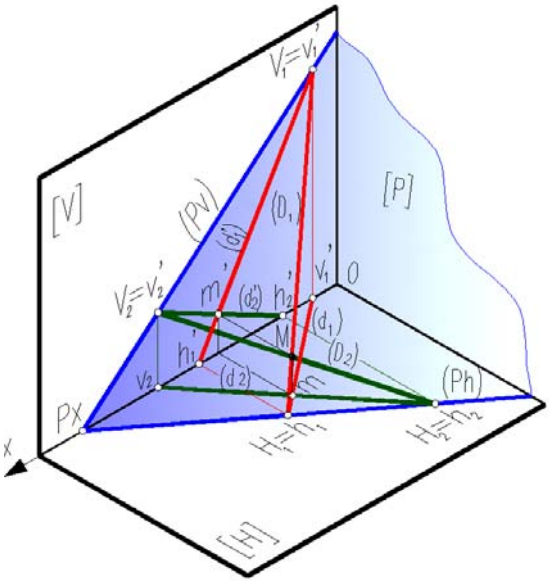


Fig. MII.U1.5

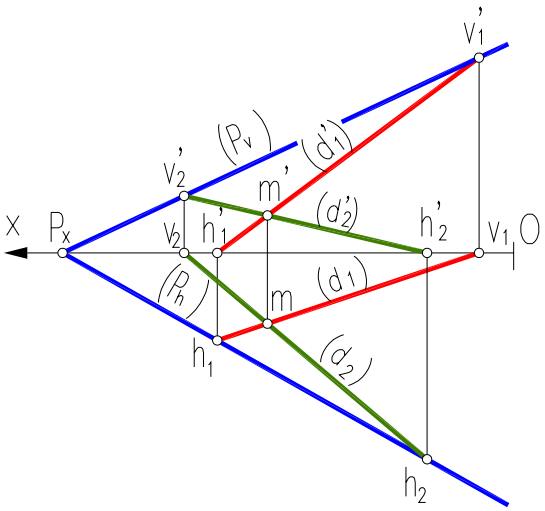


Fig. MII.U1.6

În fig. MII.U1.7 (reprezentare spațială) şi în fig. MII.U1.8 (epură) se prezintă determinarea urmelor planului *[P]* format de două drepte paralele *(D_1)* şi *(D_2)*.

Se observă că proiecțiile urmelor dreptelor h_1, h_2, sau v_1', v_2' şi punctul de concurență cu axele *Px* sunt coliniare, deci, pentru trasarea urmelor planului *[P]* este sufucientă determinarea a trei urme ale dreptelor din cele patru, *Px* rezultând la intersecția cu axa *(Ox)*.

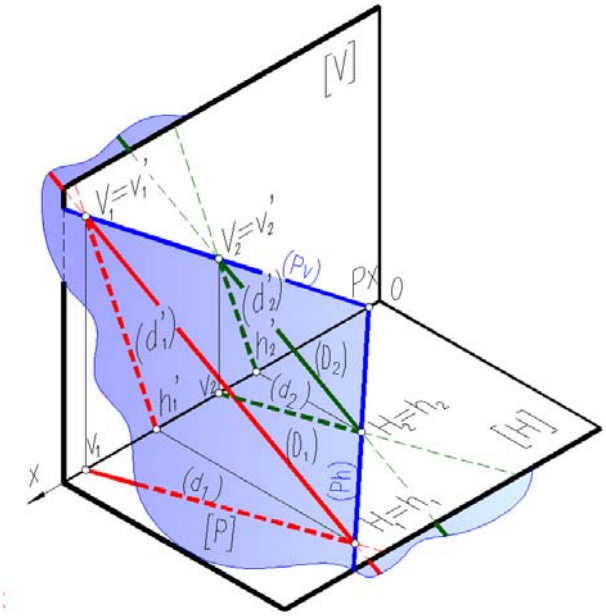


Fig. MII.U1.7

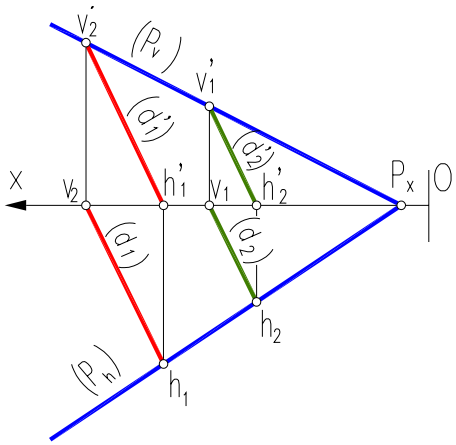


Fig. MII.U1.8

MII.U1.6. Drepte particulare ale planului

Sunt considerate *drepte particulare ale planului* dreptele care ocupă o poziție particulară față de planele de proiecție şi care sunt conținute în acel plan. Din această categorie fac parte: orizontalele, frontalele, dreptele de profil şi dreptele de cea mai mare pantă ale planului.

MII.U1.6.1. Orizontalele unui plan

Orizontalele unui plan [P] sunt dreptele conținute în planul respectiv şi care sunt paralele cu planul orizontal de proiecție *[H]*.

O orizontală a unui plan *[P]*, fiind paralelă cu planul *[H]* de proiecție, va fi paralelă cu urma orizontală a planului *(P_h)* şi va intersecta planul vertical de proiecție în punctul *V(v,v',v")*, care aparține urmei *(P_v)* a planului (fig. MII.U1.9). În consecință, în *epură* (fig. MII.U1.10), o orizontală a planului va avea proiecția verticală *(o')* paralelă cu axa *(Ox)*, proiecția urmei verticale *v'* pe urma verticală a planului *(Pv)*, iar proiecția orizontală *(o)* paralelă cu urma orizontală a planului *(Ph)*.

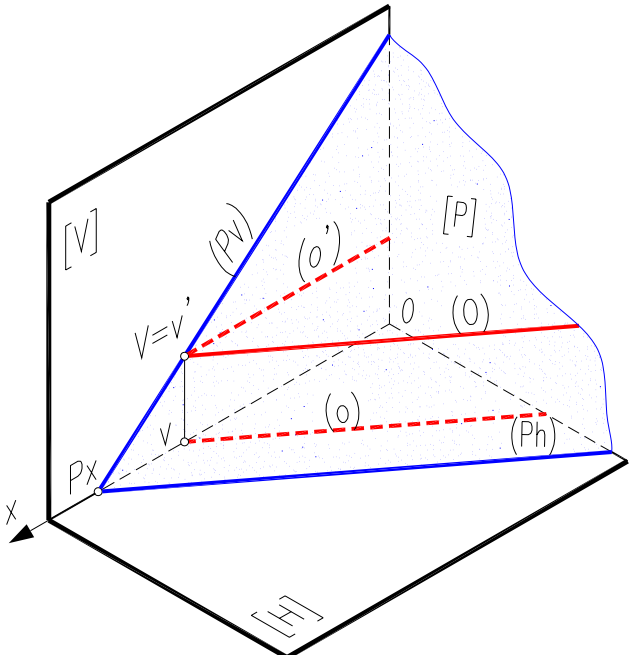


Fig. MII.U1.9

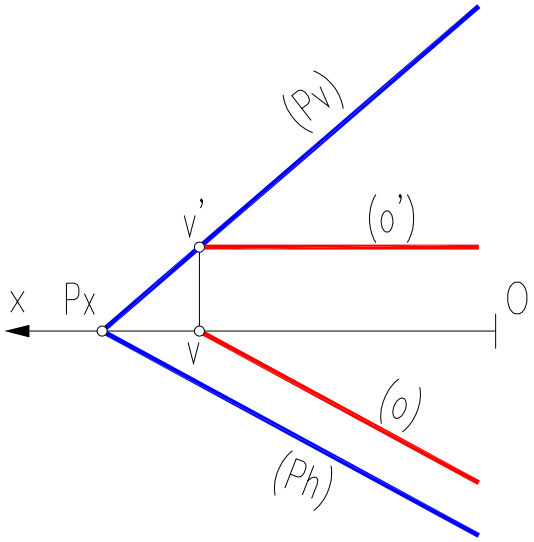


Fig. MII.U1.10

MII.U1.6.2. Frontalele unui plan

Frontalele unui plan [P] sunt dreptele conținute în planul respectiv şi care sunt paralele cu planul vertical de proiecție *[V]*.

O frontală a unui plan *[P]*, fiind paralelă cu planul *[V]* de proiecție, va fi paralelă cu urma verticală a planului *(P_v)* şi va intersecta planul *[H]* de proiecție în punctul *H(h,h',h")* care aparține urmei *(P_h)* a planului (fig. MII.U1.11). În consecință, în *epură* (fig. MII.U1.12), o frontală a planului va avea proiecția orizontală *(f)* paralelă cu axa *(Ox)*, proiecția urmei orizontale *h* pe urma orizontală a planului *(Ph)*, iar proiecția verticală *(f')* paralelă cu urma *(Pv)* a planului.

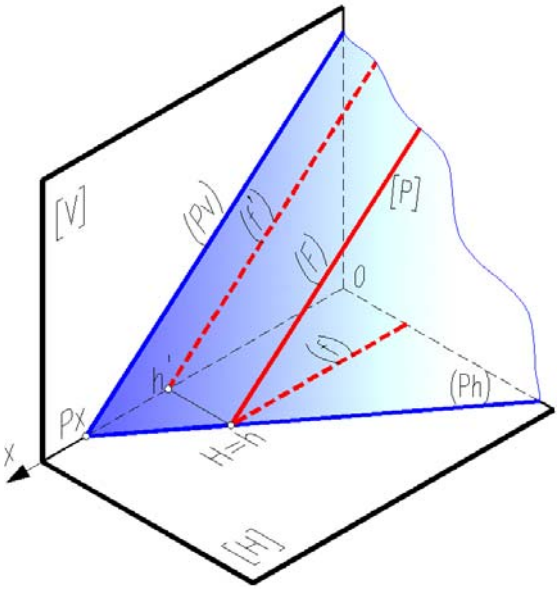


Fig. MII.U1.11

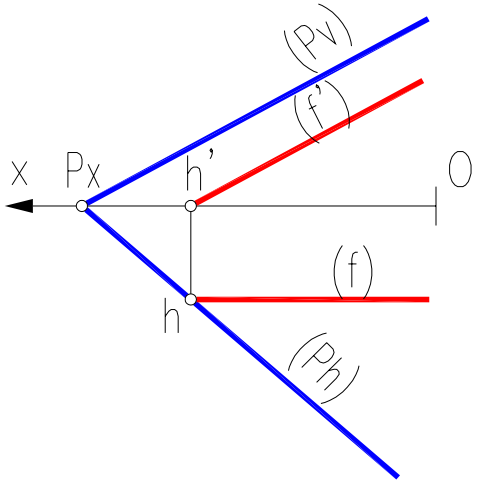


Fig. MII.U1.12

Dacă un plan este dat prin elementele care-l definesc, respectiv două drepte paralele sau două drepte concurente, atât orizontalele cât şi frontalele acestuia pot fi determinate fără determinarea urmelor planului, prin intersectarea lor cu dreptele respective, ca în epurele din fig. MII.U1.13 (pentru orizontale) şi fig. MII.U1.14 (pentru frontale).

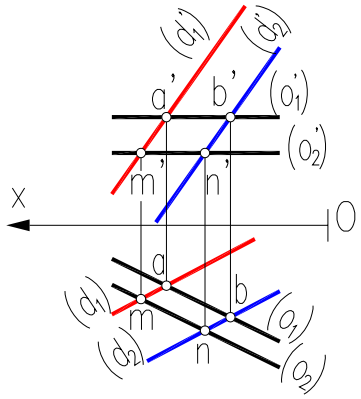


Fig. MII.U1.13

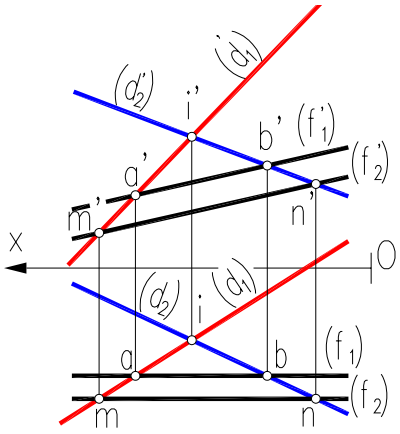


Fig. MII.U1.14

MII.U1.6.3. Dreptele de profil ale unui plan

Dreptele de profil ale unui plan sunt dreptele din plan paralele cu planul lateral de proiecție (fig. MII.U1.15).

În epură (fig. MII.U1.16), aceste drepte vor avea proiecțiile orizontale şi verticale perpendiculare pe axa *(Ox)*, iar proiecțiile laterale paralele cu urma laterală a planului.

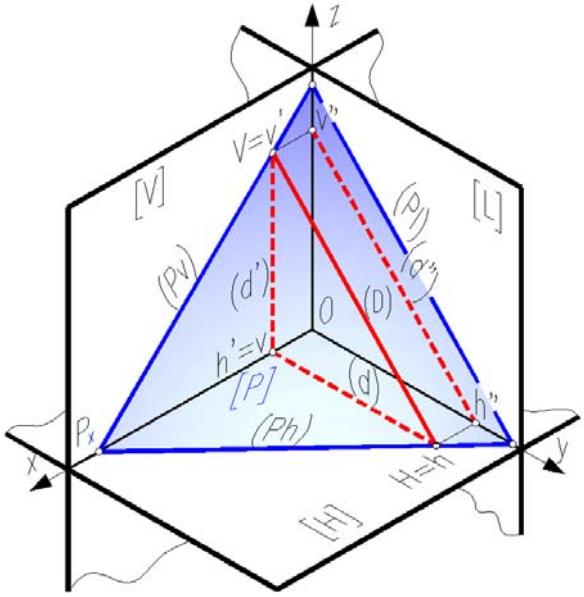


Fig. MII.U1.15

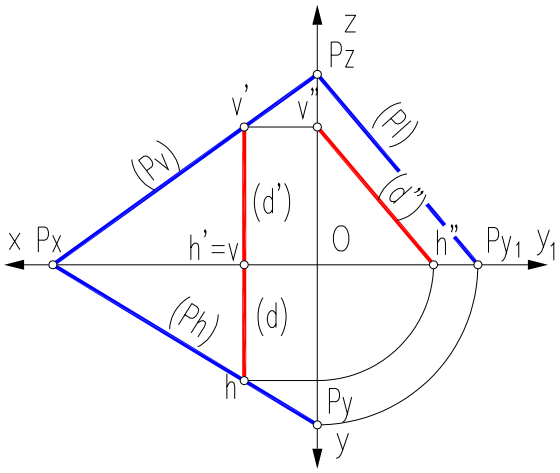


Fig. MII.U1.16

MII.U1.6.4. Dreptele de cea mai mare pantă ale unui plan

Dreptele de cea mai mare pantă ale unui plan (d.c.m.m.p.) sunt dreptele conținute în planul respectiv, care formează unghiurile cele mai mari cu planele de proiecție. Prin urmare într-un plan pot exista trei drepte (sau linii) de cea mai mare pantă: față de planul orizontal de proiecție *[H]*, față de planul vertical de proiecție *[V]* şi față de planul lateral de proiecție *[L]*.

Aceste drepte sunt perpendiculare pe urmele respective a planului.

În fig. MII.U1.17 (reprezentare spațială) şi fig. MII.U1.18 (epură) este prezentată d.c.m.m.p. față de planul orizontal de proiecție *[H]*. Se observă că această dreaptă este perpendiculară pe urma orizontală a planului, iar în epură proiecția orizontală a d.c.m.m.p. este perpendiculară pe urma orizontală a planului. Dacă se dorește aflarea adevăratei mărimi a unghiului α pe care-l face d.c.cm.m.p. cu planul orizontal de proiecție *[H]*, se rabate triunghiul dreptunghic *[h'vv']* în jurul catetei /*hv*/ până acesta se aşterne în planul orizontal *[H]* de proiecție. În triunghiul dreptunghic $[hvV_1]$ se măsoară adevărata mărime a unghiului α.

În mod asemănător se construiesc şi dreptele de cea mai mare pantă faţă de planele *[V]* şi *[L]*.

Fiind dată dreapta de cea mai mare pantă, se pot construi cu uşurinţă urmele planului din care aceasta face parte (fig. MII.U1.18). Prin *h* se construieşte *(Ph)* ⊥ *(d)*. Rezultă *Px*, apoi prin *v'* se construieşte *(Pv)*. Se poate concluziona, deci, că dreapta de cea mai mare pantă (d.c.m.m.p.) determină singură planul.

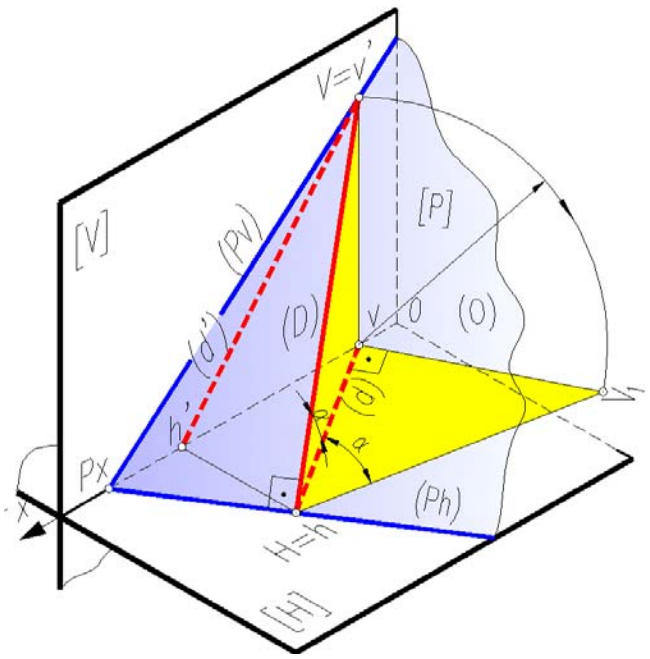


Fig. MII.U1.17

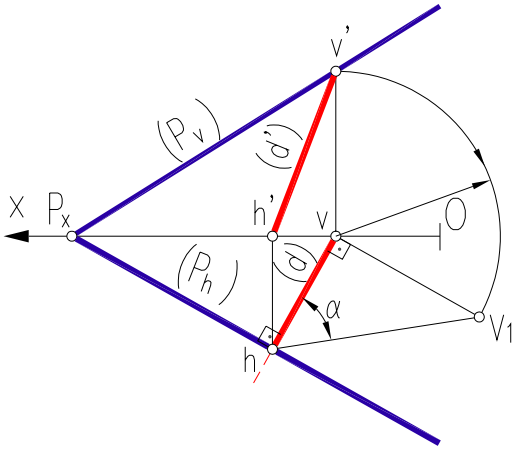


Fig. MII.U1.18

Exemple

1. Se dau punctele *A (95,15,10)*, *B(55,5,55)* şi *C(30,40,15)*. Să se construiască:

a) urmele planului definit de dreptele concurente $(D_1) = (AB)$ şi $(D_2) = (AC)$;

b) prin punctul *B*, orizontala conţinută în planul *[P]*;

c) prin punctul *C*, frontala conţinută în planul *[P]*.

d) dreapta de cea mai mare pantă (D_5) faţă de planul orizontal de proiecţie.

Rezolvare (fig. MII.U1.19): se construiesc proiecţiile urmelor dreptelor *(AB)* şi *(AC)* şi se unesc proiecţiile urmelor de acelaşi nume pentru a determina urmele planului. Orizontala şi frontala duse prin *B* şi *C* trebuie să-şi aibă urmele pe urmele de acelaşi nume ale planului, iar proiecţia orizontală, respectiv verticală, paralele cu urmele de acelaşi nume ale planului.

Pentru dreapta de cea mai mare pantă (D_5) se construieşte mai întâi proiecţia sa orizontală (d_5) într-o poziţie arbitrar aleasă, perpendiculară pe urma orizontală a

planului, cu urma sa orizontală h_5 pe urma orizontală (P_h) a planului.

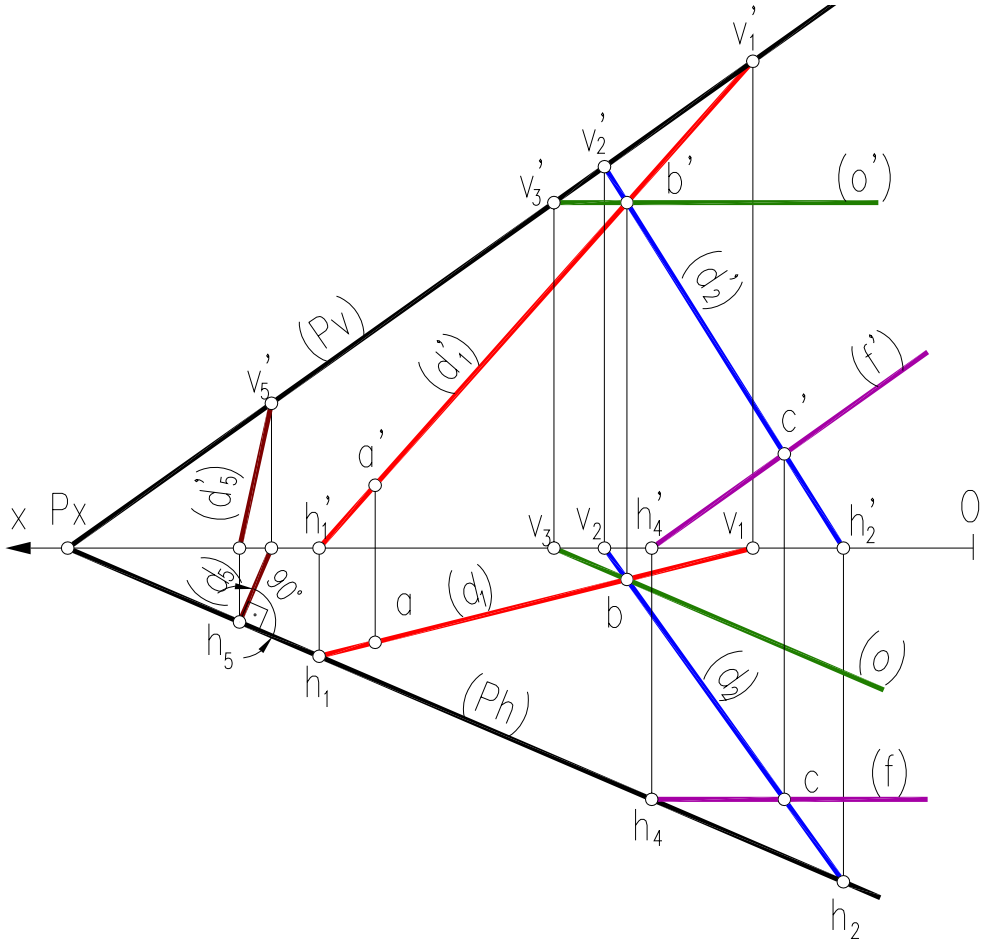


Fig. MII.U1.19

1. Se dau punctele *A (50,15,25)*, *B(10,-10,60)* şi *C(70,-50,40 şi M(35,20,25)*. Să se construiască:

- urmele planului definit de dreptele concurente (D_1)= *(AB)* şi (D_2) = *(AC)*;
- prin punctul *B*, orizontala conținută în planul *[P]*;
- prin punctul *C*, frontala conținută în planul *[P]*;
- dreapta de cea mai mare pantă față de planul orizontal de proiecție.

2. Se dau punctele $P_x(60,0,0)$, *H(10,0,20)*, *V(50,0,15)*, $M(20,y_M,-10)$. Să se determine:

- urmele planului *[P]* definit de punctele P_x, *H* şi *V*;
- proiecția *m* a punctului *M*, ştiind că punctul *M* aparține unei orizontale a planului *[P]*;
- dreapta din plan perpendiculară pe frontala planului care trece prin punctul M.
- dreapta de cea mai mare pantă față de planul vertical de proiecție.

Să ne reamintim...

- Reprezentarea planului în epură se face prin următoarele elemente:

- trei puncte necoliniare;
- o dreaptă şi un punct exterior acesteia;
- două drepte concurente (în particular – urmele planului);
- două drepte paralele;

- Dreptele de intersecţie ale unui plan cu planele de proiecţie se numesc *urmele planului*. Un plan oarecare *[P]* are trei urme: *urma orizontală (Ph), urma verticală (Pv)* şi *urma laterală (Pl;)*
- O dreaptă este inclusă într-un plan dacă urmele sale se găsesc pe urmele de acelaşi nume ale planului;
- Pentru a construi în epură un punct care să aparţină unui plan dat prin urme, este necesar ca proiecţiile acestui punct să se găsească pe proiecţiile unei drepte care aparţine planului, de regulă, o dreaptă particulară a planului;

- Determinarea urmelor planelor formate de două drepte concurente sau paralele se face prin unirea urmelor de acelaşi nume ale dreptelor respective;
- Orizontalele planului au proiecţia verticală paralelă cu axa *(Ox)*, proiecţia urmei verticale *v'* pe urma verticală a planului *(Pv)*, iar proiecţia orizontală *(o)* paralelă cu urma orizontală a planului *(Ph)*.
- Frontalele planului au proiecţia orizontală *(f)* paralelă cu axa *(Ox)*, proiecţia urmei orizontale *h* situată pe urma orizontală a planului *(Ph)*, iar proiecţia verticală *(f')* paralelă cu urma verticală *(Pv)* a planului.
- Dreptele de profil ale planului au proiecţiile orizontale şi verticale perpendiculare pe axa *(Ox)*, iar proiecţiile laterale paralele cu urma laterală a planului.
- Dreptele de cea mai mare pantă ale unui plan (d.c.m.m.p.) sunt dreptele conţinute în planul respectiv care formează unghiurile cele mai mari cu planele de proiecţie. Într-un plan oarecare există trei drepte (sau linii) de cea mai mare pantă: faţă de planul orizontal de proiecţie [H], faţă de planul vertical de proiecţie [V] şi faţă de planul lateral de proiecţie [L]. Aceste drepte sunt perpendiculare pe urmele respective a planului.
- Dreapta de cea mai mare pantă a unui plan determină singură planul.

MII.U1.7. Rezumat

În cadrul acestei unităţi de învăţare s-a prezentat modul de construcţie a planelor prin urme, respectiv, prin dreptele lor de intersecţie cu planele de proiecţie. S-au definit dreptele particulare ale planului: orizontalele, frontalele şi dreptele de profil. S-au definit proprietăţile acestora. S-au definit dreptele de cea mai mare

pantă ale unui plan.

Explicațiile au fost însoțite de desene spațiale izometrice, de epurele corespunzătoare şi de exemple lămuritoare.

MII.U1.8. Test de evaluare a cunoştinţelor

1. Cum se defineşte un plan?

2. Ce sunt urmele planului?

3. În ce constă metoda generală de construcție a urmelor unui plan format de două drepte paralele sau concurente?

4. Ce condiție trebuie să îndeplinească un punct în epură ca acesta să aparțină unui plan?

5. Cum se construiesc urmele unui plan dat prin trei puncte necolineare?

6. Care sunt dreptele particulare ale unui plan şi ce proprietăți au?

7. Ce sunt dreptele de cea mai mate pantă ale unui plan?

8. Cum se construieşte un triunghi într-un plan dat prin urme?

9. Câte urme are un plan definit de două orizontale concurente şi care sunt acestea? Dar de două frontale concurente? Dar de două drepte de profil concurente?

10. O dreaptă de cea mai mare pantă a unui plan poate determina singură planul? Dacă da explicați de ce.

Unitatea de învățare MII.U2. Poziţiile planelor şi ale dreptelor față de plane

Cuprins

MII.U2.1. Introducere 66
MII.U2.2. Competențe 67
MII.U2.3. Plane în poziții particulare față de planele de proiecție 67
MII.U2.3.1. Plane paralele cu unul din planele de proiecție 67
MII.U2.3.2. Plane perpendiculare pe unul din planele de proiecție 69
MII.U2.4. Poziția relativă a două plane 72
MII.U2.4.1. Plane concurente 72
MII.U2.4.2. Plane paralele 74
MII.U2.4.3. Plane perpendiculare 74
MII.U2.5. Poziția relativă a unei drepte față de un plan 75
MII.U2.5.1. Dreaptă paralelă cu un plan 75
MII.U2.5.2. Dreaptă concurentă cu un plan 75
MII.U2.5.3. Dreaptă perpendiculară pe un plan 77
MII.U2.6. Rezumat 82
MII.U2.7. Test de evaluare a cunoştinţelor 83

MII.U2.1. Introducere

În afară de poziția oarecare pe care o poate ocupa un plan față de planele de proiecție, se întâlnesc frecvent situații în care un plan poate ocupa o poziție particulară față de planele de proiecție. Un astfel de plan se numeşte *plan particular*. Acesta poate fi *paralel cu planele de proiecție* sau *perpendicular pe planele de proiecție.*

Planele particulare sunt frecvent utilizate ca plane ajutătoare la rezolvarea unor probleme de geometrie descriptivă.

Alte situații sunt cele în care două plane pot fi concurente sau paralele între ele.

O dreaptă poate fi conținută într-un plan, paralelă cu un plan sau concurentă cu un plan. Cunoaşterea acestor poziții, determinarea punctului de intersecție al unei drepte cu un plan etc., sunt elemnte indispensabile în rezolvarea unor probleme practice în geometria descriptivă, în special la intersecția corpurilor.

În această unitate de învățare vor fi detaliate toate aceste poziții.

MII.U2.2. Competențe

După parcurgerea materialului acestei unități de învățare studenții vor fi capabili:

- să reprezinte în epură plane în poziții particulare;
- să reprezinte în epură plane aflate în diferite poziții relative şi figuri aflate în aceste plane;
- să determine intersecția planelor între ele;
- să stabilească poziția relativă (paralelism, intersecție, perpendicularitate) a unor drepte sau a unor figuri geometrice față de aceste plane;
- să rezolve intersecția unei drepte cu un plan oarecare sau particular sau a unor figuri geometrice între ele.

Durata medie de parcurgere a acestei unități de învățare este de 3 ore.

MII.U2.3. Plane în poziții particulare față de planele de proiecție

Planele care ocupă o poziție particulară față de planele de proiecție se numesc *plane particulare*. Acestea sunt: *planele paralele cu planele de proiecție* şi *planele perpendiculare pe planele de proiecție.* Având trei plane de proiecție rezultă ca pot fi definite şase plane particulare.

MII.U2.3.1. Plane paralele cu unul din planele de proiecție

a. Planul de nivel [N] este planul paralel cu planul orizontal de proiecție *[H]*.

În fig. MII.U2.1 este reprezentat spațial, iar în fig. MII.U2.2 în epură, un *plan de nivel* care conține un triunghi *ΔABC* oarecare.

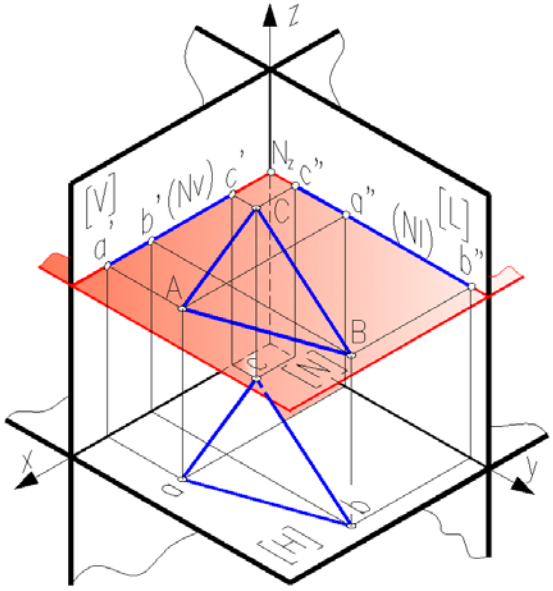


Fig. MII.U2.1

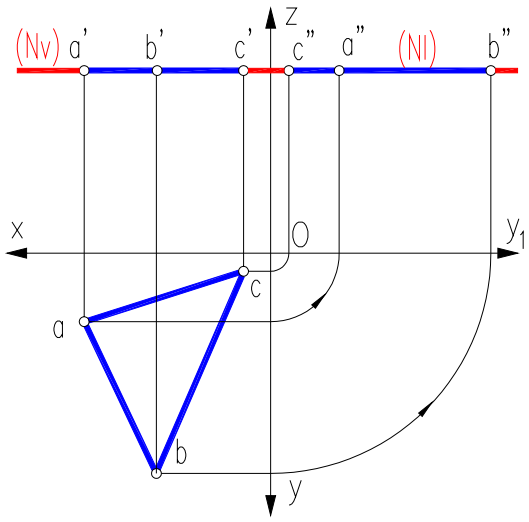


Fig. MII.U2.2

Planul de nivel prezintă următoarele proprietăți:

- nu are urmă orizontală;
- urma verticală *[N_v]* este paralelă cu axa *(Ox)*;
- urma laterală *[N_l]* este paralelă cu *(Oy_1)*;
- orice figură plană conținută în acest plan se proiectează în adevărată mărime pe planul *[H]* *($\Delta ABC \equiv \Delta abc$)* şi cu deformare totală pe *[V]* şi *[L]*; proiecția verticală *a'b'c'* este o linie ce se confundă cu *[Nv]*, iar proiecția *a"b"c"* o linie ce se confundă cu *[Nl]*;
- toate dreptele conținute în acest plan sunt orizontale.

b. Planul de front (sau frontal) [F] este planul paralel cu planul vertical de proiecție de proiecție *[V]*.

În fig. MII.U2.3 este reprezentat spațial, iar în fig. MII.U2.4 în epură, un *plan de front* care conține un triunghi *ΔABC* oarecare.

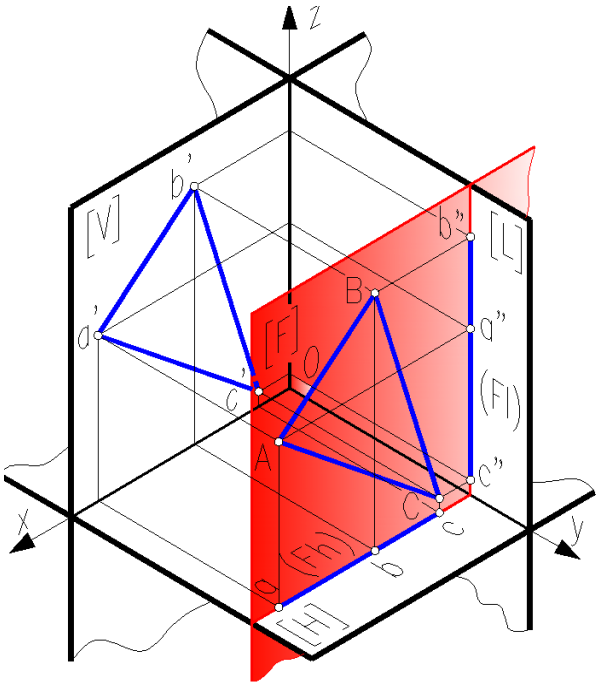


Fig. MII.U2.3

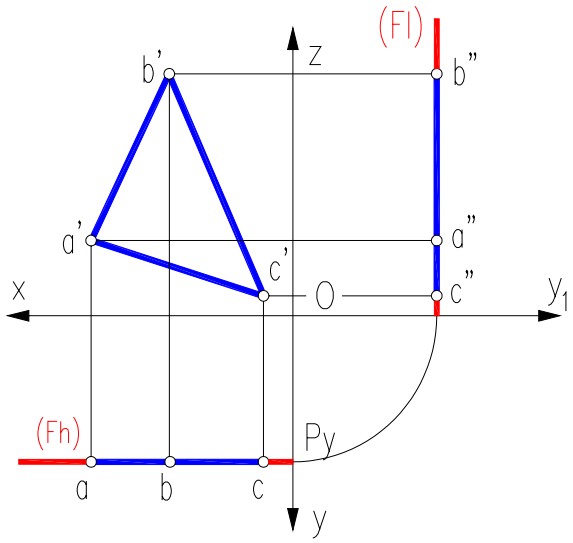


Fig. MII.U2.4

Planul de front prezintă următoarele proprietăți:

- nu are urmă verticală;
- urma orizontală *[F_h]* este paralelă cu axa *(Ox)*;
- urma laterală *[F_l]* este paralelă cu *(Oz)*;
- orice figură plană conținută în acest plan se proiectează în adevărată mărime pe planul *[V]* *($\Delta ABC \equiv \Delta a'b'c'$)* şi cu deformare totală pe *[H]* şi *[L]*;
- toate dreptele conținute în acest plan sunt frontale.

c. Planul de profil [P] este planul paralel cu planul lateral de proiecție *[L]*.

În fig. MII.U2.5 este reprezentat spațial, iar în fig. MII.U2.6 în epură, un *plan de profil* care conține un triunghi *ΔABC* oarecare.

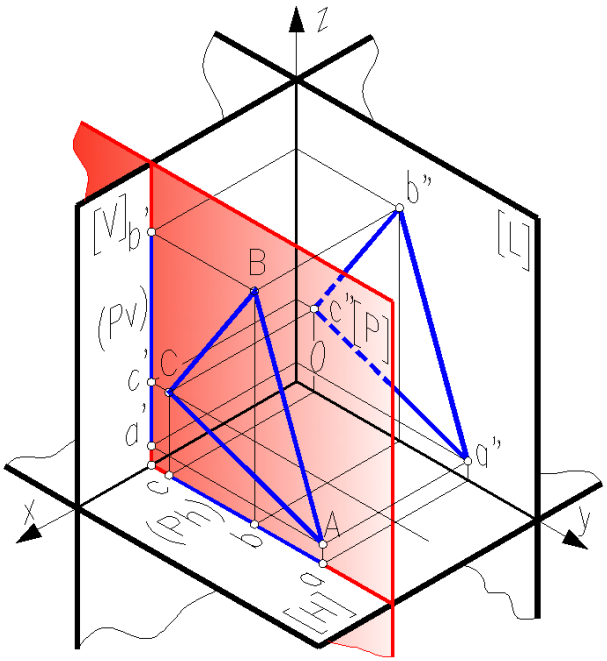


Fig. MII.U2.5

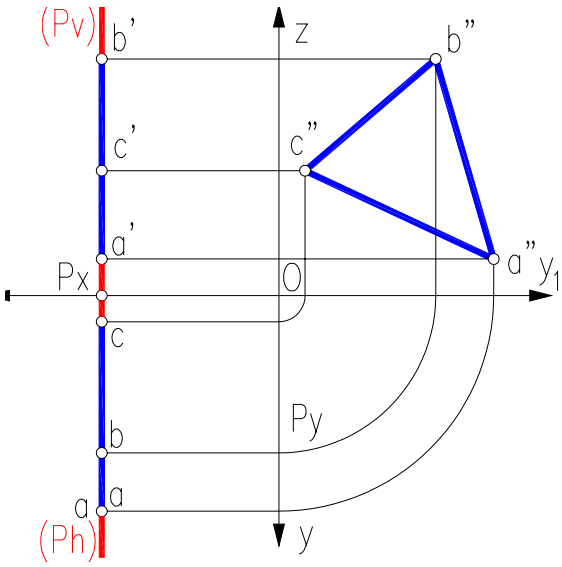


Fig. MII.U2.6

Planul de profil prezintă următoarele proprietăți:

- nu are urmă laterală;
- urma orizontală *[P_h]* și urma verticală *[P_v]* sunt perpendiculare pe axa *(Ox)*;
- orice figură plană conținută în acest plan se proiectează în adevărată mărime pe planul *[L]* *(ΔABC ≡ Δa"b"c")* și cu deformare totală pe *[H]* și *[V]*;
- toate dreptele conținute în acest plan sunt drepte de profil.

MII.U2.3.2. Plane perpendiculare pe unul din planele de proiecție

a. Planul vertical este planul perpendicular pe planul orizontal de proiecție *[H]* și înclinat față de celelalte două plane de proiecție *[V]* și *[L]*.

În fig. MII.U2.7 este reprezentat spațial, iar în fig. MII.U2.8 în epură, un *plan de vertical [P]* care conține o dreaptă *(AB)* oarecare.

Planul vertical prezintă următoarele proprietăți:

- nu intersectează axa *(Oz)*;
- urma verticală *[P_v]* a planului este perpendiculară pe axa *(Ox)*;
- urma laterală *[P_l]* este paralelă cu axa *(Oz)*;
- o figură conținută în acest plan are proiecția orizontală confundată cu urma orizontală a planului *[P_h]*, iar pe celelalte două plane se proiectează deformat;

- unghiurile α şi β pe care urma orizontală $[P_h]$ le face cu axele *(Ox)* şi *(Oy)* exprimă adevărata mărime a unghiurilor diedre formate de planul dat cu planul vertical de proiecţie *[V]* şi cu planul lateral de proiecţie *[L]*.

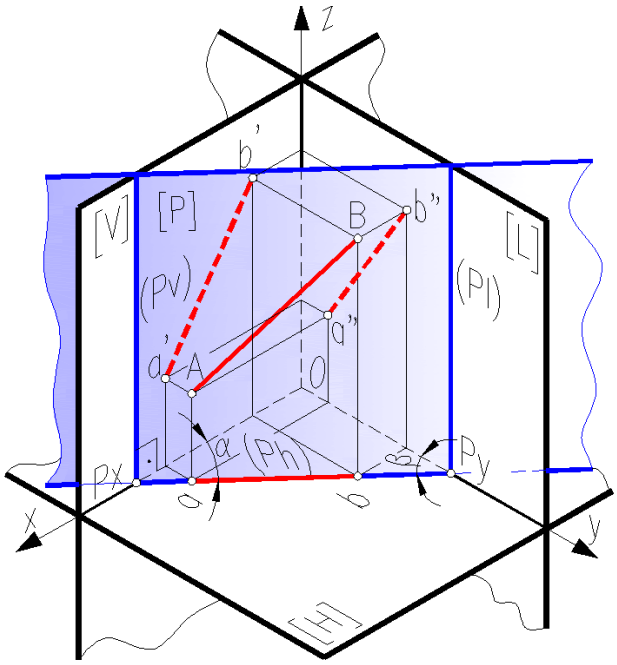


Fig. MII.U2.7

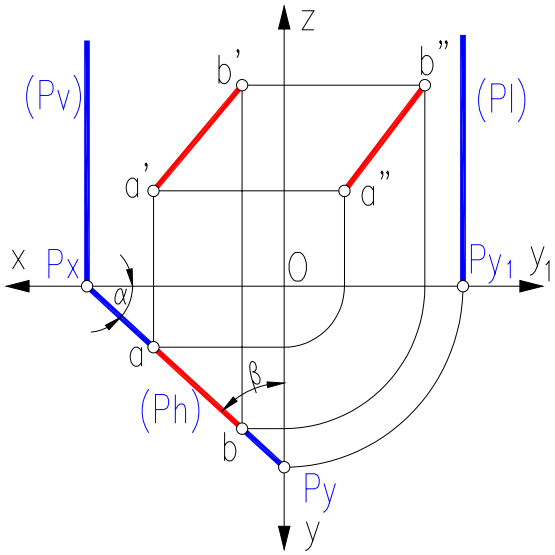


Fig. MII.U2.8

b. Planul de capăt este planul perpendicular pe planul vertical de proiecţie *[V]* şi înclinat faţă de celelalte două plane de proiecţie *[H]* şi *[L]*.

În fig. MII.U2.9 este reprezentat spaţial, iar în fig. MII.U2.10 în epură, un *plan de capăt [Q]* care conţine un cerc.

Planul de capăt prezintă următoarele proprietăţi:

- nu intersectează axa *(Oy)*;
- urma orizontală $[Q_h]$ a planului este perpendiculară pe axa *(Ox)*;
- urma laterală $[Q_l]$ este perpendiculară pe axa *(Oz)*;
- o figură conţinută în acest plan are proiecţia verticală confundată cu urma verticală a planului $[Q_v]$, iar pe celelalte două plane se proiectează deformat. În cazul unui cerc inclus în planul *[Q]*, ca în acest exemplu, proiecţiile lui orizontală şi laterală sunt elipse ($/bd/= 2R$, R fiind raza cercului, reprezintă axa mare, fiind dreaptă de capăt, iar $/ac/$ – axa mică - fiind dreaptă de front);
- unghiurile α şi β pe care urma verticală *[Qv]* le face cu axele *(Ox)* şi *(Oz)* (fig. MII.U2.10) exprimă adevărata mărime a unghiurilor diedre formate de planul dat *[Q]* cu planul orizontal de proiecţie *[H]* şi cu planul lateral de proiecţie *[L]*.

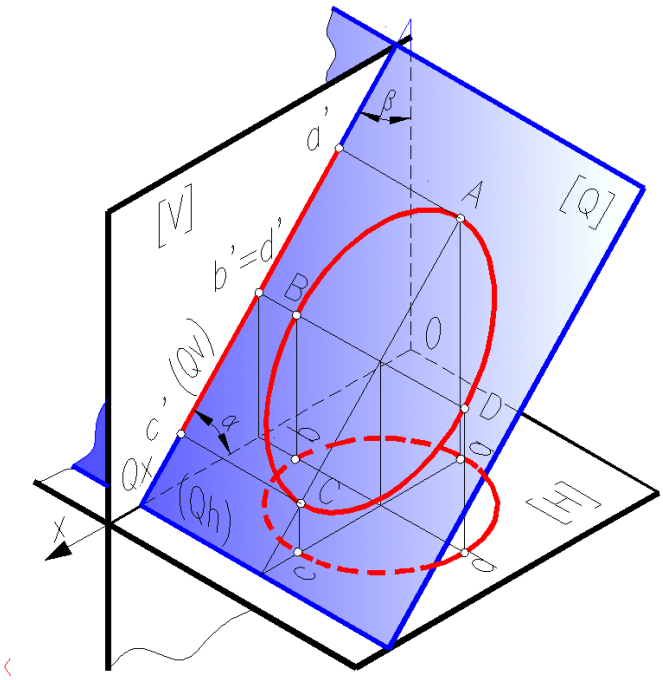


Fig. MII.U2.9

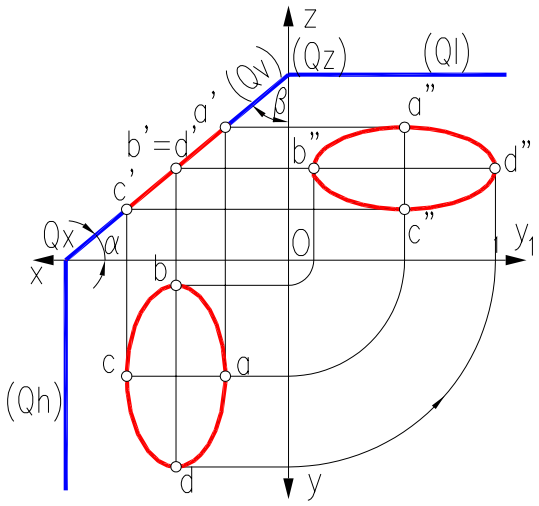


Fig. MII.U2.10

c. Planul paralel cu axa (Ox) este planul perpendicular pe planul lateral de proiecție *[L]* şi înclinat față de celelalte două plane de proiecție *[H]* şi *[V]*.

În fig. MII.U2.11 este reprezentat spațial, iar în fig. MII.U2.12 în epură, un *plan paralel cu axa (Ox) [Q]* care conține un triunghi.

Planul paralel cu axa (Ox) sau planul perpendicular pe planul lateral de proiecție prezintă următoarele proprietăți:

- nu intersectează axa *(Ox)*;
- urma orizontală $[Q_h]$ a planului este paralelă cu axa *(Ox)*;
- urma verticală $[Q_v]$ este paralelă cu axa *(Ox)*;
- o figură conținută în acest plan are proiecția verticală confundată cu urma laterală a planului $[Q_l]$, iar pe celelalte două plane se proiectează deformat.
- unghiurile α şi β pe care urma laterală $[Q_l]$ le face cu axele *(Oz)* şi (Oy_1) (fig. MII.U2.12) exprimă adevărata mărime a unghiurilor diedre formate de planul dat *[Q]* cu planul vertical de proiecție *[V]* şi cu planul orizontal de proiecție *[H]*.

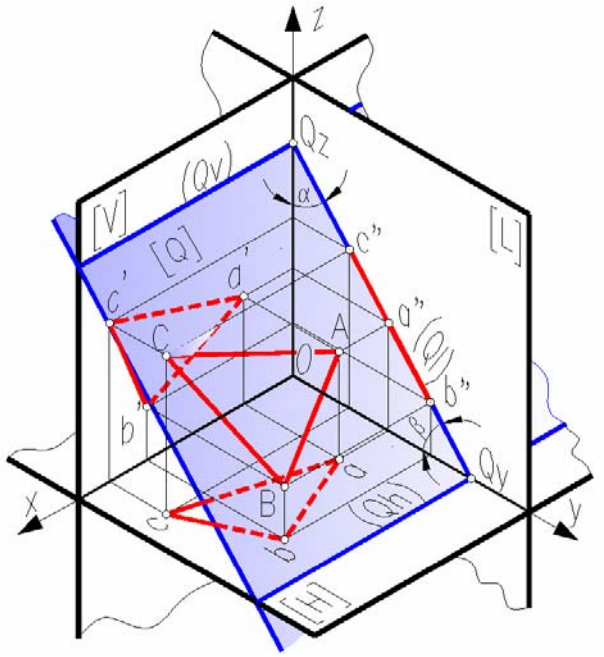


Fig. MII.U2.11

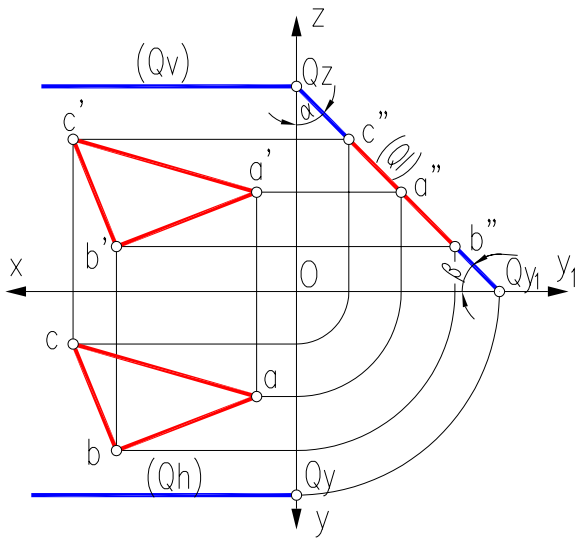


Fig. MII.U2.12

MII.U2.4. Poziția relativă a două plane

Două plane pot fi concurente sau paralele între ele.

MII.U2.4.1. Plane concurente

Două plane oarecare *[P]* şi *[Q]* se intersectează după o dreaptă *(D)* (fig. MII.U2.13). Această dreaptă, aparținând ambelor plane, va avea urmele situate pe urmele de acelaşi nume ale planelor. Rezultă că urmele dreptei de intersecție a două plane vor fi chiar punctele de intersecție ale urmelor de acelaşi nume ale planelor. În epură (fig. MII.U2.14), proiecțiile orizontală *(d)* şi verticală *(d')* ale dreptei de intersecție se obțin unind proiecțiile punctelor de intersecție ale urmelor planelor (*h* cu *v* şi *h'* cu *v')*. Cunoscând proiecțiile *(d)* şi *(d')*, proiecția laterală *(d")* se poate determina cu uşurință, dacă este necesar, unind *h"* cu *v"*.

În mod asemănător se rezolvă şi intersecția unui plan oarecare cu planele particulare sau intersecția dintre plane particulare. Se prezintă, în continuare, în epură, câteva dintre aceste intersecții: *plan oarecare cu plan de capăt* (fig. MII.U2.15); *plan oarecare cu plan de nivel* (fig. MII.U2.16); *plan vertical cu plan vertical* (fig. MII.U2.17); *plan oarecare cu plan vertical* (fig. MII.U2.18).

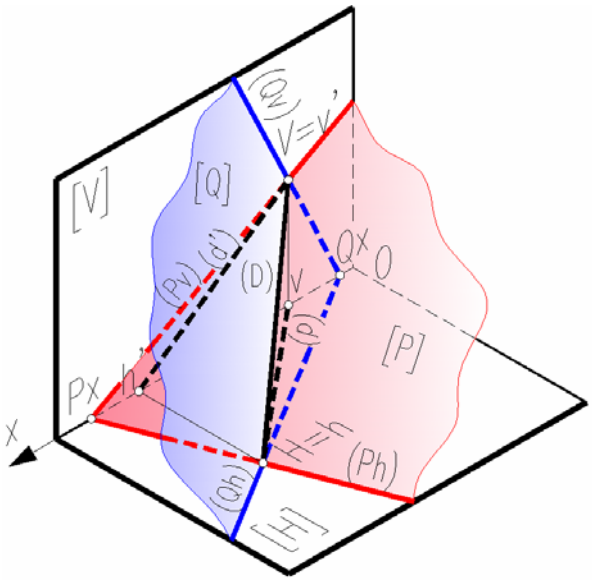


Fig. MII.U2.13

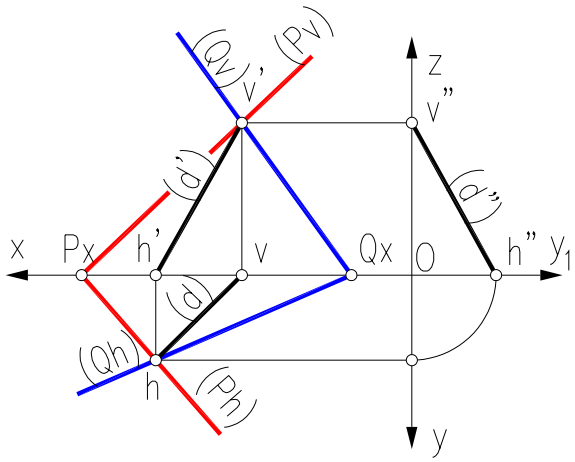


Fig. MII.U2.14

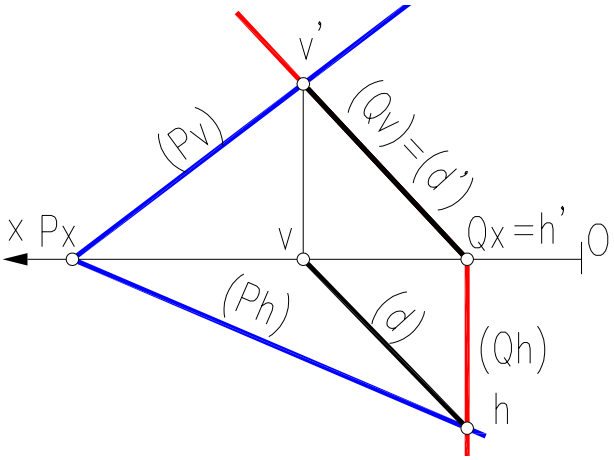


Fig. MII.U2.15

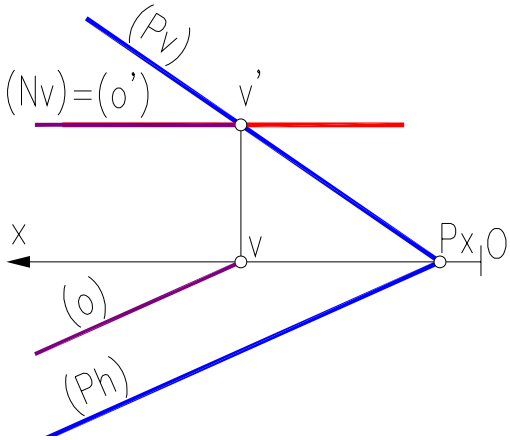


Fig. MII.U2.16

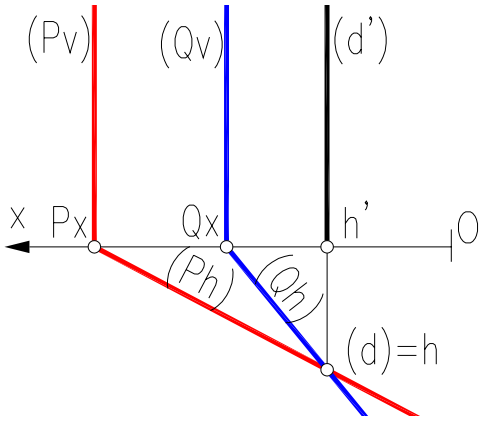


Fig. MII.U2.17

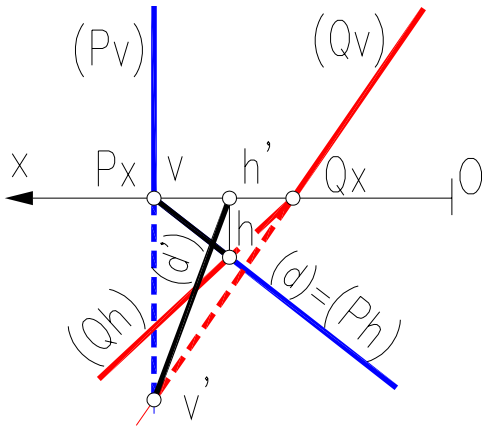


Fig. MII.U2.18

MII.U2.4.2. Plane paralele

Din geometria plană se cunoaşte că două plane sunt paralele între ele dacă două drepte dintr-unul din plane sunt paralele cu două drepte din celălalt plan. Dar, pentru că două din dreptele unui plan sunt şi urmele planului, rezultă că dacă planele sunt date prin urme, atunci *două plane sunt paralele dacă urmele lor de acelaşi nume sunt paralele* (fig. MII.U2.19).

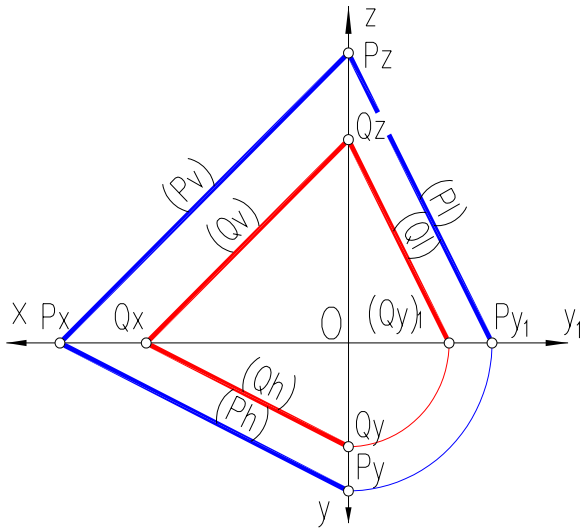


Fig. MII.U2.19

MII.U2.4.3. Plane perpendiculare

Se va reveni asupra acestui paragraf după studierea subcapitolului următor .

Pentru construcția unui plan *[Q]* perpendicular pe alt plan *[P]* se aplică teorema potrivit căreia *dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci toate planele care conțin această dreaptă sunt perpendiculare pe celălalt plan*.

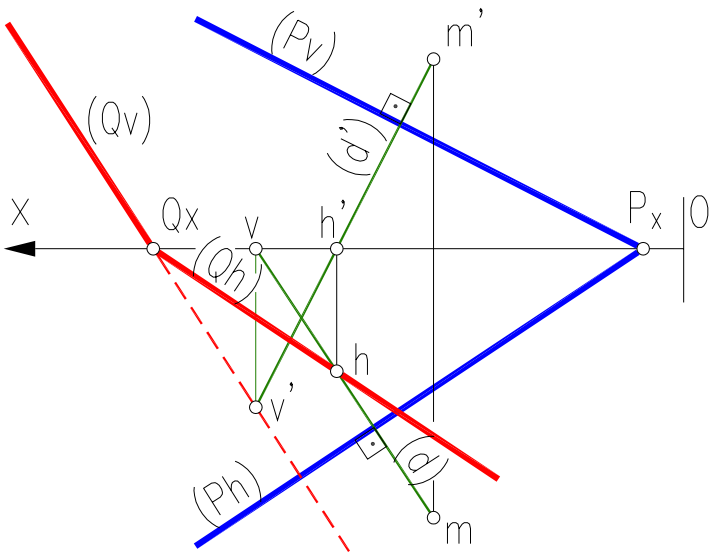


Fig. MII.U2.20

Având în vedere că printr-o dreaptă se poate construi o infinitate de plane, rezultă că problema are o infinitate de soluții.

În epura din fig. MII.U2.20 se prezintă construcția unui plan *[Q]* perpendicular pe un plan *[P]*, planul *[Q]* trecând prin punctul *M*. Prin acest punct s-a construit o dreaptă *(D)* perpendiculară pe planul *[P]*, dreapta fiind inclusă în planul *[Q]* (urmele acesteia s-au plasat pe urmele planului *[Q]*).

MII.U2.5. Poziția relativă a unei drepte față de un plan

O dreaptă poate fi conținută într-un plan, paralelă cu un plan sau concurentă cu un plan. Aşa cum s-a arătat la începutul capitolului, o dreaptă este conținută într-un plan dat prin urme, atunci când urmele sale se găsesc pe urmele de acelaşi nume ale planului.

MII.U2.5.1. Dreapta paralelă cu un plan

O dreaptă este paralelă cu un plan atunci când este paralelă cu o dreaptă conținută în acel plan şi, reciproc, *un plan este paralel cu o dreaptă atunci când conține o dreaptă paralelă cu dreapta dată*.

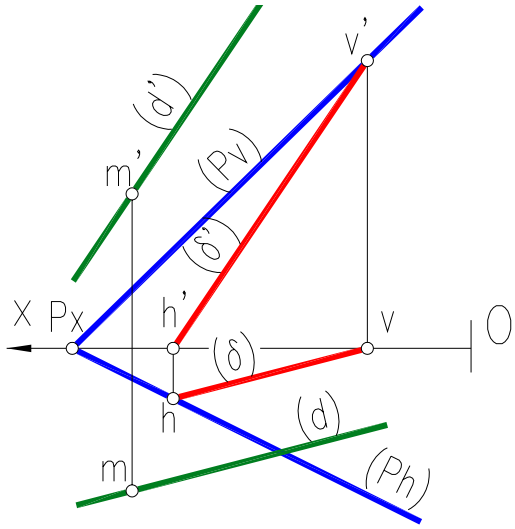


Fig. MII.U2.21

În fig. MII.U2.21 se prezintă epura unei drepte *(D)* construită printr-un punct *M* şi paralelă cu un plan *[P]* dat prin urme. Prin punctul *M(m,m')* s-a construit *(D) II (Δ); (Δ) ⊂ [P]*; (*(d) II (δ); (d') II (δ')*).

Printr-un punct exterior unui plan se poate duce o infinitate de drepte paralele acelui plan.

MII.U2.5.2. Dreapta concurentă cu un plan

Pentru găsirea punctului de intersecție *I* al unei drepte *(D)* oarecare cu un plan oarecare *[P]* se apelează la o construcție ajutătoare. Se parcurg următoarele etape (v. fig. MII.U2.22 – reprezentare spațială şi fig. MII.U2.23 – reprezentare în epură):

- se ia un alt plan *[Q]*, de regulă un plan proiectant (vertical sau de capăt), plan care să conțină dreapta dată (în acest exemplu s-a luat un plan vertical);
- se determină dreapta de intersecție *(Δ)* dintre planele *[P]* şi *[Q]*;
- punctul de concurență *I* al dreptei date *(D)* cu dreapta de intersecție *(Δ)* a planelor reprezintă chiar punctul de intersecție ***I*** al dreptei *(D)* cu planul *[P]*.

În epură (fig. MII.U2.23), în acest exemplu, se construieşte *(Qh)* confundată cu *(d)* şi *(Qv)⊥(Ox)*. Se determină proiecțiile dreptei de intersecție *(δ')* unind *v'* cu *h'* şi *(δ)* confundat cu *(Qh)* şi *(d)*. La intersecția lui *(δ')* cu *(d')* rezultă *i'*, apoi, pe aceeaşi linie de ordine, *i*.

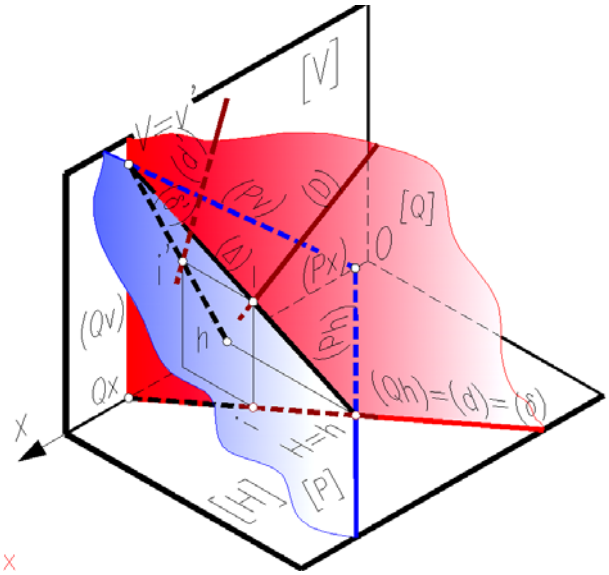


Fig. MII.U2.22

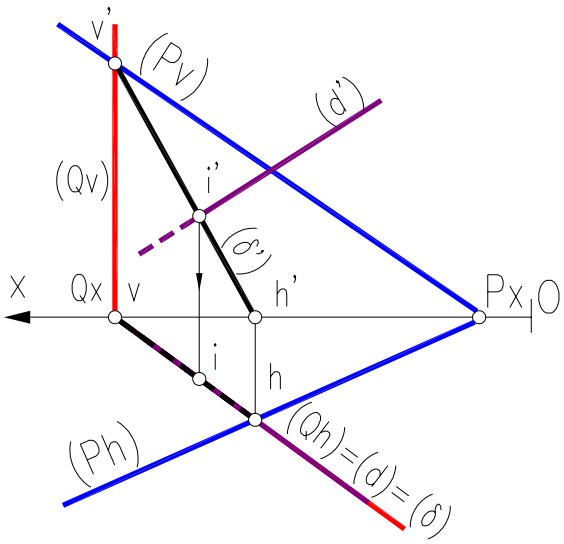


Fig. MII.U2.23

În cazul *intersecției unei drepte particulare cu un plan oarecare*, se poate lua ca plan auxiliar de intersecție un plan paralel cu planele de proiecție. În fig. MII.U2.24 se prezintă epura intersecției dintre o dreaptă orizontală *(O)* şi un plan oarecare *[P]*, la care planul auxiliar ales este un plan de nivel *[N]* care conține orizontala. *(Nv)* se ia confundat cu *(o')*.

În cazul *intersecției dintre o dreaptă oarecare şi un plan proiectant*, punctul de intersecție are una din proiecții situată la intersecția uneia din urmele planului şi proiecția de acelaşi nume a dreptei. În fig. MII.U2.25 se prezintă epura intersecției dintre o dreaptă oarecare *(D)* şi un plan de capăt *[Q]*.

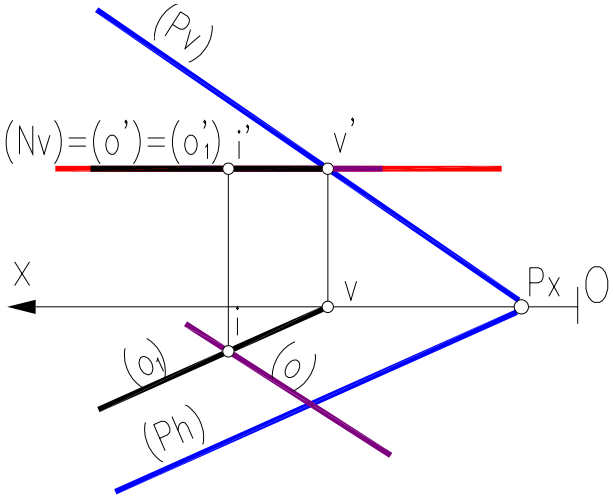


Fig. MII.U2.24

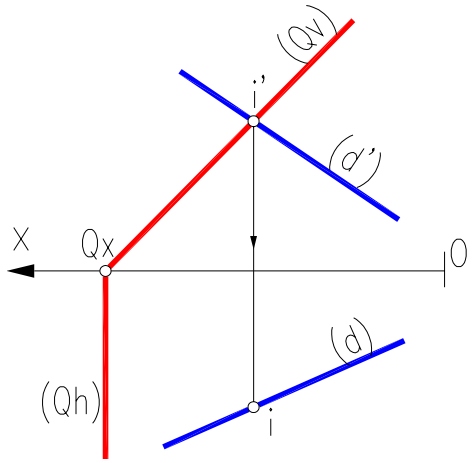


Fig. MII.U2.25

MII.U2.5.3. Dreapta perpendiculară pe un plan

Construcția unei drepte perpendiculare pe un plan se bazează pe următoarele teoreme:

- Dacă o dreaptă *(D)* este perpendiculară pe două drepte concurente conținute într-un plan *[P],* atunci drepata este perpendiculară pe orice dreaptă a planului care trece prin punctul de concurență.
- Un unghi drept se proiectează în adevărată mărime pe un plan dacă cel puțin una din laturile unghiului este paralelă cu acel plan.

Rezultă că, în epură, o dreaptă (D) este perpendiculară pe un plan [P] dacă proiecțiile sale sunt perpendiculare pe urmele de acelaşi nume ale planului.

Pentru a demonstra acest lucru se consideră un plan *[P],* o orizontală *(O)* şi o frontală *(F)* ale planului concurente în punctul *M* (fig. MII.U2.26). În epură proiecția verticală *(d')* a dreptei va fi perpendiculară pe proiecția verticală a frontalei *(f')*, iar proiecția orizontală *(d)* va fi perpendiculară pe proiecția orizontală a orizontalei *(o)*. Dar, proiecția verticală a frontalei fiind paralelă cu urma verticală a planului, iar proiecția orizontală a orizontalei fiind paralelă cu urma orizontală a planului, rezultă că proiecțiile dreptei vor fi perpendiculare şi pe urmele de acelaşi nume ale planului.

În fig. MII.U2.27 se prezintă în epură construcția unei perpendiculare în punctul *A* al unui triunghi *ΔABC* oarecare dat. Conform cu cele enunțate mai sus, s-au utilizat ca drepte ajutătoare o orizontală şi o frontală situate în planul triunghiului (concurente cu laturile acestuia în punctele *A, M* şi *N*), fără a mai determina urmele planului. Prin *a'* s-a construit *(o') ∥(Ox)*, s-a determinat *n'*, apoi *n* - proiectiile punctului *(N)* de concurență a orizontalei *(O)* cu latura *(BC)* a triunghiului. Prin *a* s-a construit *(f) ∥(Ox)*, s-a determinat *m*, apoi *m'* - proiecțiile punctului *(M)* de concurență a frontalei *(F)* cu latura *(BC)* a triunghiului. S-a construit *(d')⊥(f')* si *(d) ⊥(o)*, respectiv, proiecțiile dreptei *(D)* - perpendiculara cerută.

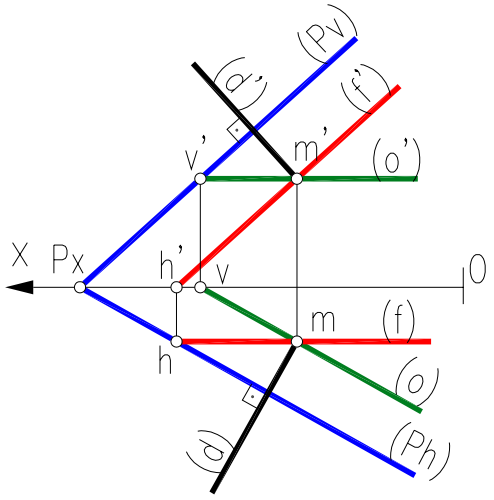


Fig. MII.U2.26

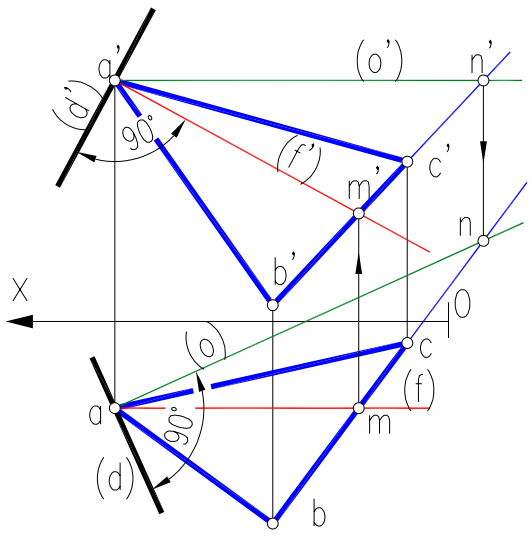


Fig. MII.U2.27

Exemple

1. Se dau planele *[P]* şi *[Q]* şi punctul *M* exterior acestora. Planul *[P]* este definit de punctele $P_x(101,0,0)$, *E(9,40,0)* şi *F(80,0,15)*, iar planul *[Q]* de punctele *Qx(23,0,0)*, *R(89,35,0)* şi *T(30,0,-50)*. Punctul *M* are coordonatele *M(51,36,50)*. Să se construiască prin punctul *M* dreapta *(D)* paralelă ambelor plane (fig. MII.U2.28).

Indicaţie: dreapta căutată *(D)* este paralelă la dreapta de intersecţie a planelor *(Δ)*.

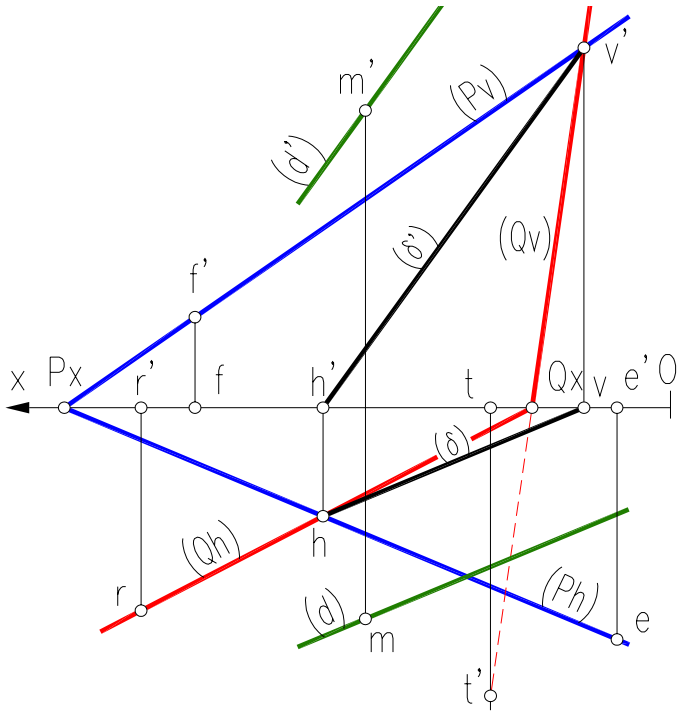


Fig. MII.U2.28

2. Se dau punctele *A(10,50,40)*, *B(25,8,8)*, *C(75,30,60)* şi *M(45,50,10)*. Să se determine proiecţiile punctului de intersecţie *N* a perpendicularei *(D)* coborâte din *M* pe planul triunghiului *ABC*. Să se determine vizibilitatea acestei perpendiculare (fig. MII.U2.29).

Rezolvare: se construieşte orizontala *(O)* şi frontala *(F)* în planul triunghiului. Conform teoremei unghiului drept din *M* se poate construi perpendiculata *(D)* pe planul triunghiului ducând *(d)* ⊥ *(o)* şi *(d')* ⊥ *(f')*. Pentru găsirea punctului de intersecţie *N* se ia ca plan auxiliar un plan de capăt *[Q]* şi se rezolvă intersecţia conform metodei cunoscute de la intersecţia dreaptă-plan.

Considerând triunghiul opac, **vizibilitatea** se determină analizând poziţia faţă de planele de proiecţie a două puncte confundate într-una din proiecţii. Astfel, punctul *R* de pe latura *(AC)* a triunghiului având cota mai mare decât a punctului *P* de pe dreapta *(D)*, rezultă că în proiecţie orizontală punctul *R*

acoperă punctul *P* şi, implicit, latura *(AC)* trece pe deasupra dreptei *(D)*. În consecinţă, până în punctul de intersecţie *N* dreapta *(D)* este acoperită de planul triunghiului, proiecţia orizontală *(d)* a dreptei trasându-se cu linie întreruptă pe porţiunea */pn/*. Analog, pentru vizibilitatea în proiecţie verticală, se analizează valoarea depărtării punctelor *4* şi *S* ale căror proiecţii verticale sunt confundate. Punctul *4* având depărtarea mai mare ca a punctului *S*, în proiecţie verticală latura *(AC)* acoperă dreapta *(D)*, deci, până în punctul de intersecţie *N*, *(d')* se desenează cu linie întreruptă pe porţiunea */s'n'/*.

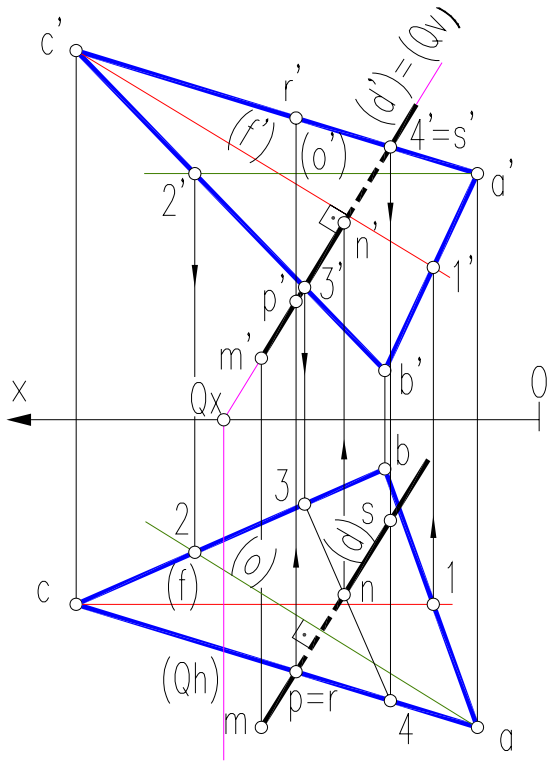


Fig. MII.U2.29

4. Se dau plăcile triunghiulare *[ABC]* şi *[MNP]* definite de punctele *A(15,50,50), B(40,105,90), C(120,15,5)* şi *M(30,25,40), N(125,40,65), P(60,95,5)*. Să se determine intersecţia celor două placi şi să se stabilească vizibilitatea în epură.

Rezolvare (Fig. MII.U2.30): se determină, ca şi în exemplul precedent, intersecţia dreptelor *(AC)* şi *(BC)* cu planul triunghiului *MNP,* luând ca plane auxiliare planele de capăt *[Q_1]* şi *[Q_2]*. Prin unirea punctelor de intersecţie *P* şi *Q* rezultă dreapta de intersecţie *(PQ)*. Vizibilitatea se determină, ca şi în exemplul precedent, analizând punctele *4* şi *U,* apoi *R* şi *S*.

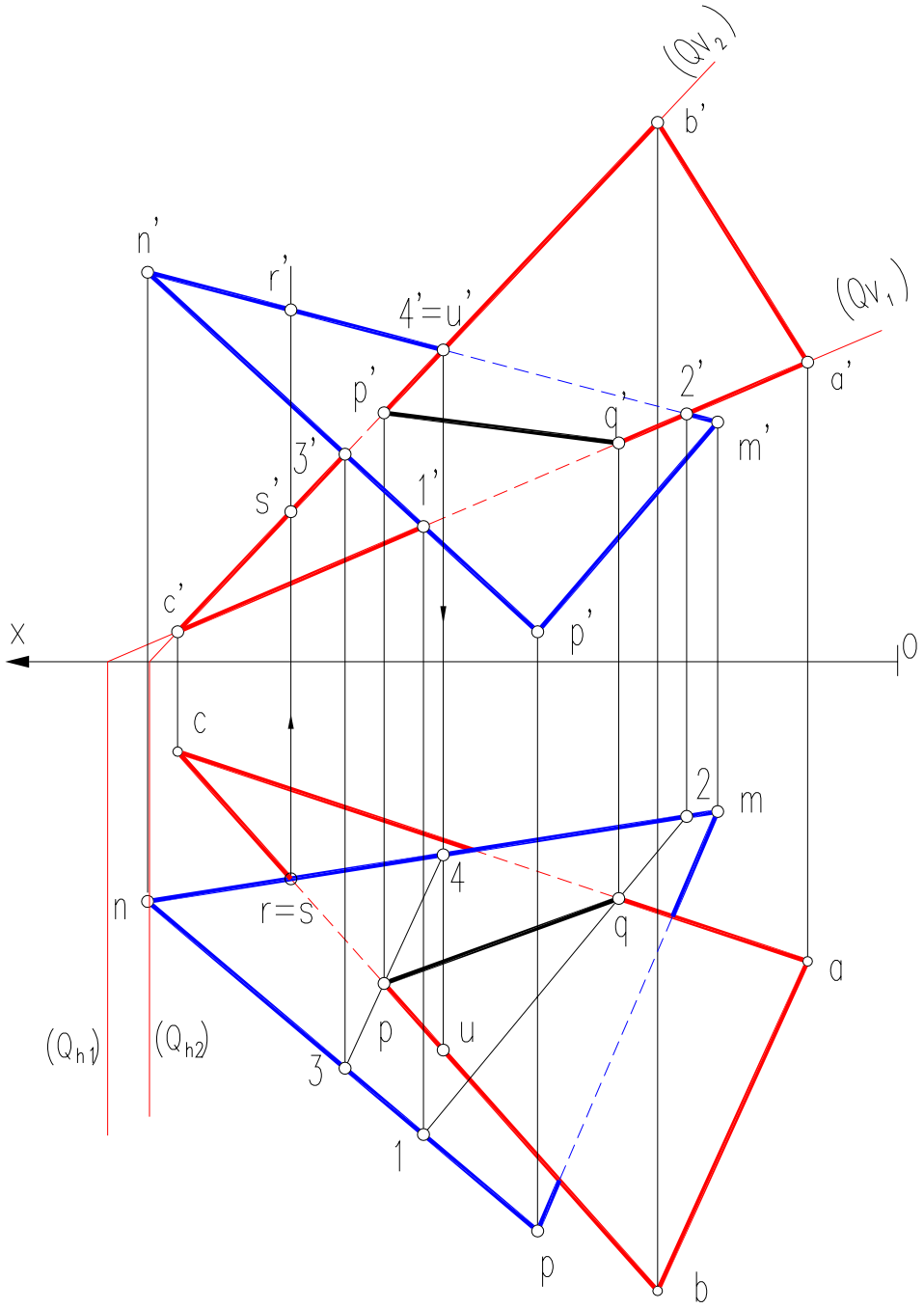


Fig. MII.U2.30

1. Se dau punctele *H(55,-30,0), V(30,0,-20)* şi $R_x(35,0,0)$. Să se determine:
- urmele planului *[P]* pentru care dreapta *(D)* determinată de punctele *H* şi *V* reprezintă dreapta de cea mai mare pantă faţă de planul orizontal de proiecţie *[H]*;
- planul vertical *[R]* determinat de punctul R_x şi care are urma orizontală R_h paralelă cu P_h;
- dreapta de intersecţie dintre planul *[P]* şi *[R];*

2. Se dau punctele *A(95,5,25)*, *B(50,50,5)* şi C(30,20,70). Să se construiască perpendiculara din punctul *M(75,55,60)* pe planul triunghiului *ABC* fără a determina urmele planului, să se găsească punctul *N* de intersecţie al perpendicularei cu placa triunghiulară şi să se stabilească vizibilitatea acesteia considerând triunghiul o suprafaţă opacă.

3. Se consideră planul *[P]* determinat de punctele $P_x(105,0,0)$, $P_y(0,95,0)$ şi $P_z(0,0,65)$, dreapta *(D)* determinată de punctele *A(20,20,5)* şi *B(60,35,35)* şi punctul *M(85,40,40)*. Să se construiască prin punctul *M* un plan *[Q]* paralel cu dreapta *(D)* şi perpendicular pe planul *[P]*.
Indicaţie: Prin punctul *M* se construiesc dreptele (D_1) paralelă cu *(D)* şi (D_2) perpendiculară pe planul *[P]*. Planul *[Q]* va fi definit de dreptele (D_1) şi (D_2).

4. Să se determine proiecţiile punctului de intersecţie a trei plane oarecare *[P], [Q]* şi *[R]* luate arbitrar.

5. Să se construiască proiecţiile poligonului *[ABCDEF]*, cunoscând *A(110,20,30)*, *B(70,60,30)*, *C(80,20,60)*, $D(250,40,z_D)$, $E(60,z_E,100)$, $F(x_F,80,10)$.

6. Fie dreptele (D_1) şi (D_2) disjuncte. Să se determine proiecţiile perpendicularei comune.

Să ne reamintim...

- *Planul de nivel [N]* este planul paralel cu planul orizontal de proiecţie *[H]*. Orice figură plană conţinută în acest plan se proiectează în adevărată mărime pe planul *[H]*.
- *Planul de front (sau frontal) [F]* este planul paralel cu planul vertical de proiecţie de proiecţie *[V]*. Orice figură plană conţinută în acest plan se proiectează în adevărată mărime pe planul *[V]*.
- *Planul de profil [P]* este planul paralel cu planul lateral de proiecţie de proiecţie *[L]*. Orice figură plană conţinută în acest plan se proiectează în adevărată mărime pe planul *[L]*.
- *Planul vertical* este planul perpendicular pe planul orizontal de proiecţie *[H]*. O figură conţinută în acest plan are proiecţia orizontală confundată cu urma orizontală a planului $[P_h]$.
- *Planul de capăt* este planul perpendicular pe planul vertical de proiecţie *[V]*. O figură conţinută în acest plan are proiecţia verticală confundată cu urma verticală a planului $[Q_v]$.
- *Planul paralel cu axa (Ox)* este planul perpendicular pe planul lateral de proiecţie *[L]*. O figură conţinută în acest plan are proiecţia verticală confundată

cu urma laterală a planului *[Q_l]*.

- Două plane oarecare *[P]* şi *[Q]* se intersectează după o dreaptă *(D)*. Această dreaptă, aparţinând ambelor plane, va avea urmele situate pe urmele de acelaşi nume ale planelor. Rezultă că urmele dreptei de intersecţie a două plane vor fi chiar punctele de intersecţie ale urmelor de acelaşi nume ale planelor.
- Două plane sunt paralele între ele dacă două drepte dintr-unul din plane sunt paralele cu două drepte din celălalt plan.
- Două plane date prin urme sunt paralele între ele dacă urmele lor de acelaşi nume sunt paralele.
- Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci toate planele care conţin această dreaptă sunt perpendiculare pe celălalt plan.
- O dreaptă este paralelă cu un plan atunci când este paralelă cu o dreaptă conţinută în acel plan.
- Un plan este paralel cu o dreaptă atunci când conţine o dreaptă paralelă cu dreapta dată.
- Pentru găsirea punctului de intersecţie *I* al unei drepte *(D)* oarecare cu un plan oarecare *[P]* se procedează în felul următor:

  - se ia un alt plan (auxiliar) *[Q]*, de regulă un plan proiectant (vertical sau de capăt), plan care să conţină dreapta dată;
  - se determină dreapta de intersecţie *(Δ)* dintre planele *[P]* şi *[Q]*;
  - punctul de concurenţă *I* al dreptei date *(D)* cu dreapta de intersecţie *(Δ)* a planelor reprezintă chiar punctul de intersecţie *I* al dreptei *(D)* cu planul *[P]*.

- În cazul intersecţiei unei drepte particulare cu un plan oarecare, se poate lua ca plan auxiliar de intersecţie un plan paralel cu planele de proiecţie.
- În cazul intersecţiei dintre o dreaptă oarecare şi un plan proiectant, punctul de intersecţie are una din proiecţii situată la intersecţia uneia din urmele planului.
- O dreaptă *(D)* este perpendiculară pe un plan *[P]* dacă proiecţiile sale sunt perpendiculare pe urmele de acelaşi nume ale planului.

MII.U2.6. Rezumat

În cadrul acestei unităţi de învăţare s-au definit planele particulare, respectiv planele paralele cu planele de proiecţie sau perpendiculare pe planele de proiecţie.

S-au analizat, de asemenea, situaţiile în care două plane sunt concurente sau paralele între ele. S-a explicat modul de găsire a dreptei de intersecţie a planelor concurente.

S-au prezentat dreptele conţinute într-un plan, paralele cu un plan sau concurente cu un plan.

S-a explicat modalitatea de determinare punctului de intersecție a unei drepte cu un plan dat prin urme, sau dat printr-o figură plană, şi condițiile de perpendicularitate.

Explicațiile au fost însoțite de desene spațiale izometrice, de epurele corespunzătoare şi de exemple concludente.

MII.U2.7. Test de evaluare a cunoştințelor

1. Unde sunt plasate urmele dreptei de intersecție a două plane date prin urme?

2. Care sunt planele de poziții particulare şi ce proprietăți au?

3. Cum sunt urmele a două plane paralele?

4. Ce condiție trebuie să îndeplinească un plan perpendicular pe alt plan?

5. Ce condiție trebuie să îndeplinească o dreaptă paralelă cu un plan?

6. În ce constă construcția găsirii punctului de intersecție al unei drepte cu un plan oarecare?

7. Ce condiție trebuie să îndeplinească în epură o dreaptă perpendiculară pe un plan oarecare dat prin urme?

8. Cum se construieşte o dreaptă perpendiculară pe planul unei figuri fără a determina urmele planului?

9. Cum se găseşte proiecția verticală a punctului de intersecție a unei drepte cu un plan de capăt?

10. Cum se găseşte proiecția orizontală a punctului de intersecție a unei drepte cu un plan de vertical?

Unitatea de învățare MII.U3. Metodele geometriei descriptive - I

Cuprins

MII.U3.1. Introducere 84
MII.U3.2. Competențe..... 85
MII.U3.3. Metoda schimbării planelor de proiecție. 85
MII.U3.3.1. Schimbarea planului orizontal de proiecție pentru un punct..... 85
MII.U3.3.2. Schimbarea planului vertical de proiecție pentru un punct..... 86
MII.U3.3.3. Schimbarea planului orizontal de proiecție pentru o dreaptă..... 87
MII.U3.3.4. Schimbarea planului vertical de proiecție pentru o dreaptă..... 88
MII.U3.4. Metoda rotației 89
MII.U3.4.1. Rotația de nivel pentru un punct 89
MII.U3.4.2. Rotația de front pentru un punct..... 90
MII.U3.4.3. Rotația de nivel pentru o dreaptă 91
MII.U3.4.4. Rotația de front pentru o dreaptă..... 91
MII.U3.5. Rezumat..... 96
MII.U3.6. Test de evaluare a cunoştinţelor 97

MII.U3.1. Introducere

Se cunoaşte faptul că, dacă un element geometric spațial (dreaptă, figură plană, unghi) se găseşte într-o poziție particulară față de planele de proiecție, atunci una sau chiar două dintre proiecțiile sale reprezintă adevărata mărime a elementului respectiv. Astfel, lungimea unui segment de dreaptă orizontală poate fi măsurată în epură pe proiecția sa orizontală, lungimea unui segment de dreaptă verticală poate fi măsurată în epură pe proiecțiile sale verticală şi laterală etc. De foarte multe ori însă, elementul geometric spațial ocupă o poziție oarecare față de planele de proiecție proiectându-se deformat pe aceste plane. Dacă se doreşte, totuşi, aflarea mărimii reale a acestor elemente, sau aflarea unor distanțe, sau a unor unghiuri în adevărată mărime etc., acest lucru se poate realiza cu uşurință prin apelarea la o serie de tehnici speciale pe care le oferă Geometria descriptivă, tehnici numite *„Metodele geometriei descriptive”*.

Prin metodele geometriei descriptive se realizează deci, transformarea proiecțiilor unor elemente geometrice aflate în poziții oarecare față de planele de proiecție, în alte poziții care sunt mai avantajoase pentru rezolvarea unor probleme specifice

geometriei descriptive sau desenului tehnic.

Rezolvarea grafică a unor probleme metrice (determinarea unor distanțe, unghiuri, arii etc.) impune utilizarea acestor metode pentru transformarea pozițiilor datelor inițiale ale acestor probleme în poziții particulare față de sistemul de referință. Această transformare se realizează fie prin modificarea sistemului de referință în raport cu elementul geometric considerat fix, fie prin modificarea poziției elementului în raport cu sistemul de referință adoptat. Cele două metode ale geometriei descriptive sunt:

- *metoda schimbării planelor de proiecție*;
- *metoda rotației* (cu cazul său particular - *rabaterea*).

MII.U3.2. Competențe

După parcurgerea materialului acestei unități de învățare studenții vor fi capabili:

- să aplice metoda schimbării planelor de proiecție (orizontal, vertical sau chiar lateral) pentru punct, dreaptă sau pentru diverse figuri din spațiu, pentru aducerea acestora în alte poziții convenabile sau pentru aflarea adevaratei lor mărimi;
- să aplice metoda rotației de nivel şi de front a unui punct, a unei drepte sau a unei figuri din spațiu, pentru aducerea acestora în alte poziții convenabile sau pentru aflarea adevaratei lor mărimi;
- să rezolve grafic o serie de probleme metrice - determinarea unor distanțe, unghiuri, arii etc.
- să rezolve probleme complexe referitoare la desfăşurarea suprafețelor sau la intersectarea diferitelor corpuri.

Durata medie de parcurgere a acestei unități de învățare este de 3 ore.

MII.U3.3. Metoda schimbării planelor de proiecție

Metoda schimbării planelor de proiecție presupune ca elementele geometrice spațiale, considerate fixe, să fie aduse în poziții particulare față de un nou sistem de referință obținut prin schimbarea poziției planelor de proiecție, dar cu păstrarea perpendicularității acestora.

MII.U3.3.1. Schimbarea planului orizontal de proiecție pentru un punct

Fie punctul A situat în sistemul de proiecție $[V] \perp [H]$ cu proiecțiile sale a şi a' (fig. MII.U3.1). Se înlocuieşte planul $[H]$ cu planul $[H_1]$. Se obține noul diedru de proiecție $[V] \perp [H_1]$ şi noua axă (O_1x_1) la intersecția lui $[V]$ cu $[H_1]$. Se proiectează punctul A în noul sistem

de proiecție. Noua proiecție orizontală a punctului *A* va fi a_1, iar proiecția verticală *a'* rămâne neschimbată. Se constată că noua proiecție orizontală a_1 a punctului *A* are aceeaşi depărtare *y*, ca şi vechea sa proiecție *a*. Se rabate planul $[H_1]$ până la suprapunerea peste *[V]*.

În consecință, întocmirea epurei punctului *A* în noul sistem de proiecție (fig. MII.U3.2) va cuprinde următoarea succesiune de operații:

- se construieşte epura punctului în sistemul inițial;
- se trasează noua linie de pământ - axa (O_1x_1) – (axa s-a ales arbitrar). Noua origine O_1 se alege astfel încât să se păstreze sensul axei din vechea epură;
- din *a'* se trasează noua linie de ordine perpendiculară pe (O_1x_1) pe care se măsoară aceeaşi depărtare *y* ca şi a proiecției *a,* obținându-se astfel noua proiecție orizontală a_1 a punctului *A*.

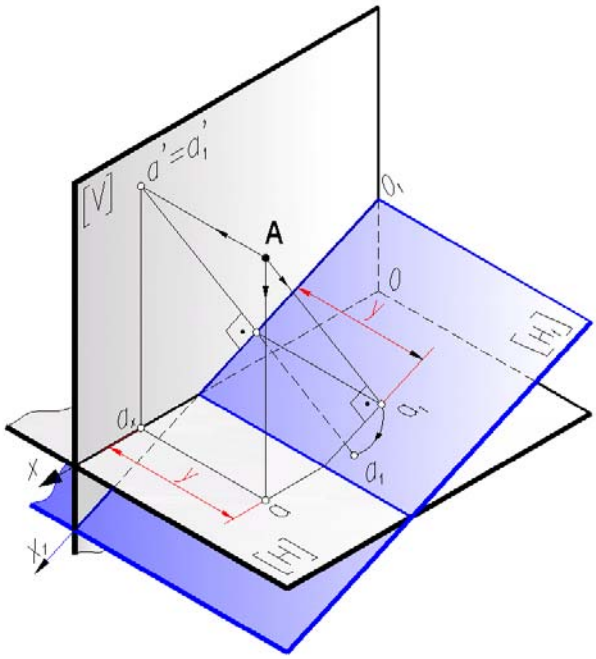


Fig. MII.U3.1

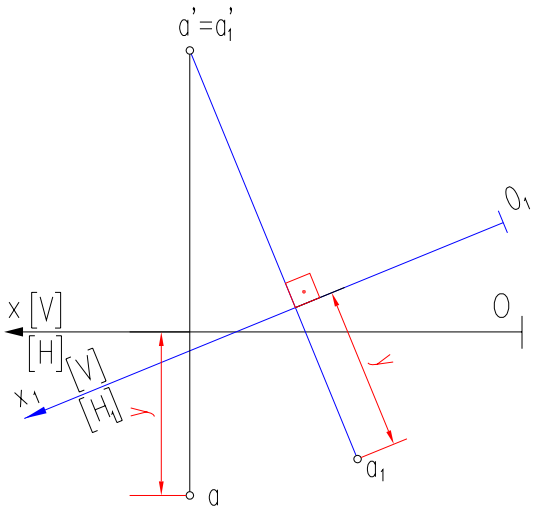


Fig. MII.U3.2

MII.U3.3.2. Schimbarea planului vertical de proiecție pentru un punct

Fie punctul *A* situat în sistemul de proiecție *[V]* ⊥ *[H]* cu proiecțiile sale *a* şi *a'* (fig. MII.U3.3). Se înlocuieşte planul *[V]* cu planul $[V_1]$. Se obține noul diedru de proiecție $[V_1] \perp [H]$ şi noua axă (O_1x_1) la intersecția lui $[V_1]$ cu *[H]*. Se proiectează punctul *A* în noul sistem de proiecție. Noua proiecție verticală a punctului *A* va fi a_1', iar proiecția orizontală *a* rămâne neschimbată. Se constată că noua proiecție verticală a_1' a punctului *A* are aceeaşi cotă *z*, ca şi vechea sa proiecție *a'*.

În consecință, întocmirea epurei punctului *A* în noul sistem de proiecție (fig. MII.U3.4) va cuprinde următoarea succesiune de operații:

- se construiește epura punctului în sistemul inițial;
- se trasează noua linie de pământ - axa *(O_1x_1)* – (în acest exemplu axa s-a ales arbitrar). Noua origine *O_1* se alege astfel încât să se păstreze sensul axei din vechea epură;
- din *a* se trasează noua linie de ordine perpendiculară pe *(O_1x_1)* pe care se măsoară aceeaşi cotă *z* ca şi a proiecției *a'*, obținându-se astfel noua proiecție verticală *a_1'* a punctului *A*.

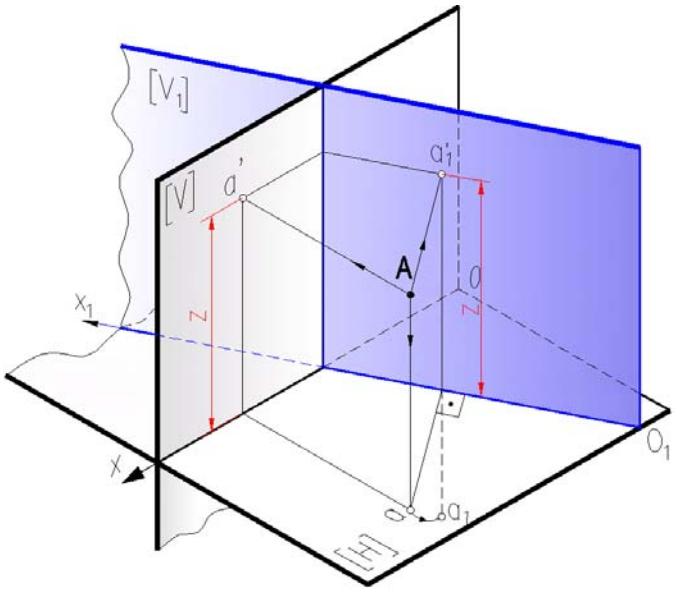


Fig. MII.U3.3

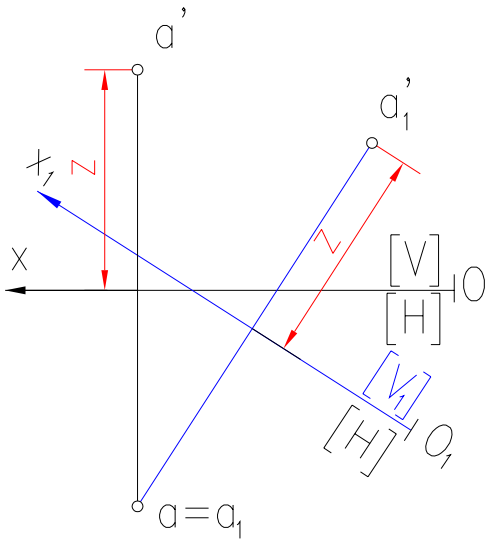


Fig. MII.U3.4

MII.U3.3.3. Schimbarea planului orizontal de proiecție pentru o dreaptă

Prin schimbarea planului orizontal de proiecție *[H]* pentru o dreaptă se urmăreşte, de regulă, aducerea dreptei într-o poziție particulară față de acesta (orizontală, dacă dreapta este o dreaptă oarecare, verticală sau fronto-orizontală, dacă dreapta este o frontală).

Fie dreapta oarecare *(D)* definită de punctele *A* şi *B*, situată în sistemul de proiecție *[V]* ⊥ *[H],* cu proiecțiile sale *(d)* şi *(d')* (fig. MII.U3.5). Se înlocuieşte planul *[H]* cu planul *[H_1]* care se plasează paralel cu dreapta *(D)*. Se obține noul sistem de proiecție *[V]* ⊥ *[H_1]* şi noua axă *(O_1x_1)* la intersecția lui *[V]* cu *[H_1]*. În noul sistem dreapta *(D)* devine o orizontală. Se proiectează dreapta *(D)* în noul sistem de proiecție. Noua proiecție orizontală a dreptei va fi *(d_1)* şi rezultă prin unirea noilor proiecții *a_1* şi *b_1* ale punctelor *A* şi *B*. Proiecția verticală *(d')* rămâne neschimbată.

La întocmirea epurei dreptei *(D)* în noul sistem de proiecție (fig. MII.U3.6) se vor întocmi epurele punctelor *A* şi *B* (v. § MII.U3.3.1.) unindu-se proiecțiile de acelaşi nume.

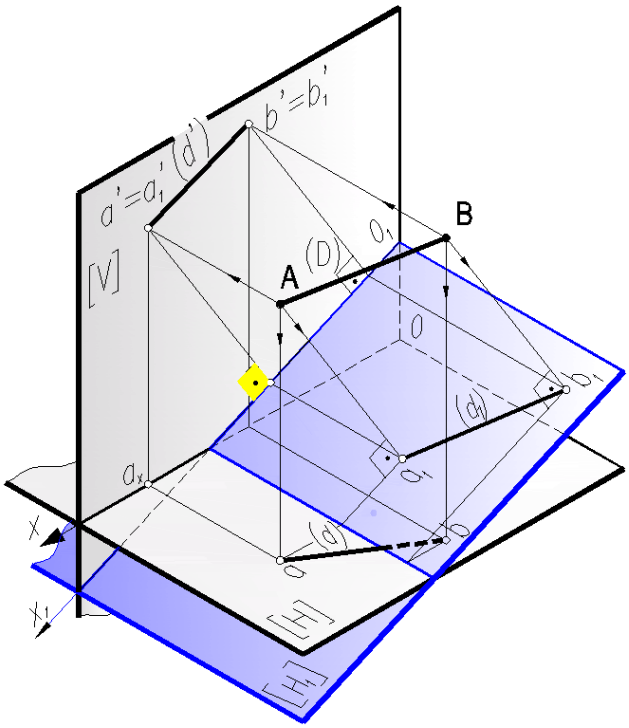


Fig. MII.U3.5

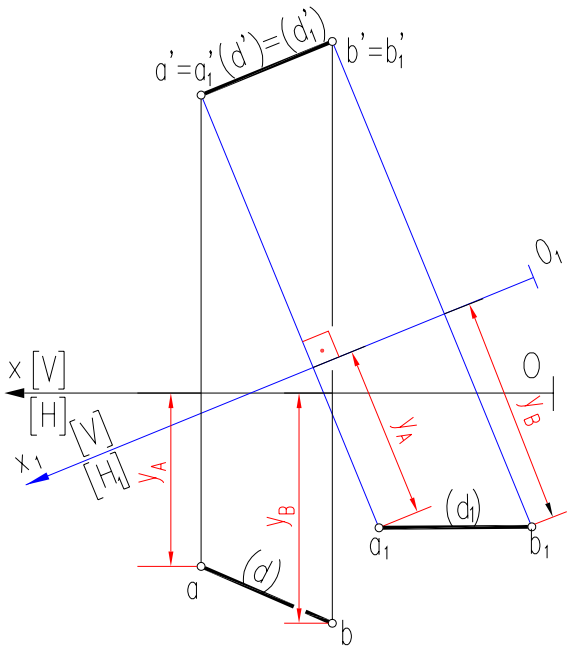


Fig. MII.U3.6

MII.U3.3.4. Schimbarea planului vertical de proiecție pentru o dreaptă

Prin schimbarea planului vertical de proiecție *[H]* pentru o dreaptă se urmăreşte, de regulă, aducerea dreptei într-o poziție particulară față de acesta (frontală, dacă dreapta este o dreaptă oarecare, sau dreaptă de capăt sau fronto-orizontală, dacă dreapta este o orizontală).

Fie dreapta oarecare *(D)* definită de punctele *A* şi *B*, situată în sistemul de proiecție *[V] ⊥ [H],* cu proiecțiile sale *(d)* şi *(d')* (fig. MII.U3.7). Se înlocuieşte planul *[V]* cu planul *[V1],* care se plasează paralel cu dreapta *(D)*. Se obține noul sistem de proiecție *[V1] ⊥ [H]* şi noua axă *(O_1x_1)* la intersecția lui *[V1]* cu *[H]*. În noul sistem dreapta *(D)* devine o frontală. Se proiectează dreapta *(D)* în noul sistem de proiecție. Noua proiecție verticală a dreptei va fi *(d_1')* şi rezultă prin unirea noilor proiecții *a_1'* şi *b_1'* ale punctelor *A* şi *B*. Proiecția orizontală *(d)* rămâne neschimbată.

La întocmirea epurei dreptei *(D)* în noul sistem de proiecție (fig. MII.U3.8), se vor întocmi epurele punctelor *A* şi *B* (v.§ MII.U3.3.2.) unindu-se proiecțiile de acelaşi nume.

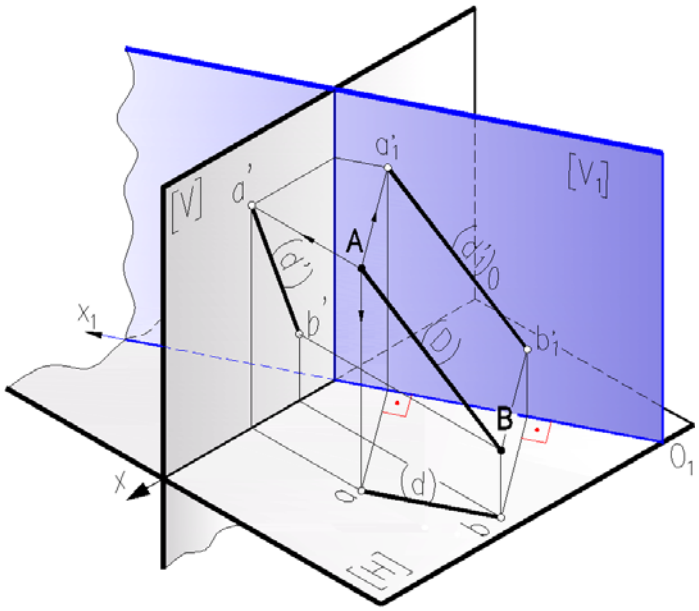


Fig. MII.U3.7

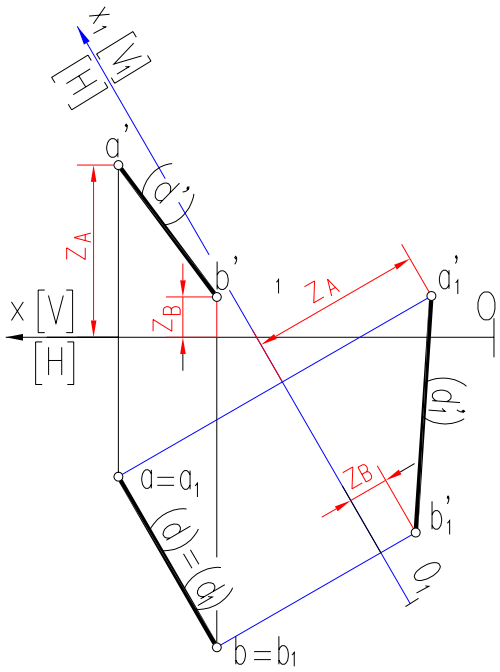


Fig. MII.U3.8

MII.U3.4. Metoda rotației

Metoda rotației constă în transformarea proiecțiilor unui element geometric spațial prin rotirea acestuia în jurul unei axe, păstrând planele de proiecție imobile. Poziția axei în jurul căreia se execută rotația elementului geometric spațial se alege în funcție de scopul urmărit: se poate alege o dreaptă oarecare sau o dreaptă particulară. De regulă, se alege ca axă de rotație o dreaptă particulară, în care caz se disting următoarele tipuri de rotații:

- rotația de nivel – în jurul unei axe verticale;
- rotația de front – în jurul unei axe de capăt;
- rotația de profil (utilizată mai rar) în jurul unei fronto-orizontale.

MII.U3.4.1. Rotația de nivel pentru un punct

În fig. MII.U3.9 este reprezentată spațial rotația unui punct *A* într-un plan de nivel *[N],* cu un unghi α în jurul unei axe verticale *(Z)* până ocupă poziția A_1. În fig. MII.U3.10 este prezentată *epura* acestei rotații. Se constată că, în cazul acestei rotații proiecția orizontală *a* a punctului *A* descrie un arc de cerc, iar proiecția verticală *a'* se deplasează pe urma verticală (N_v) a planului de nivel în care se efectuează rotația.

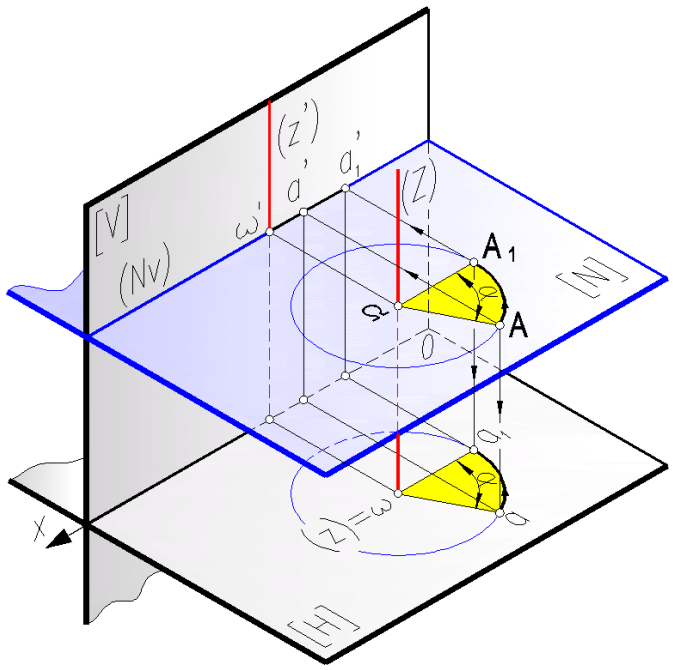


Fig. MII.U3.9

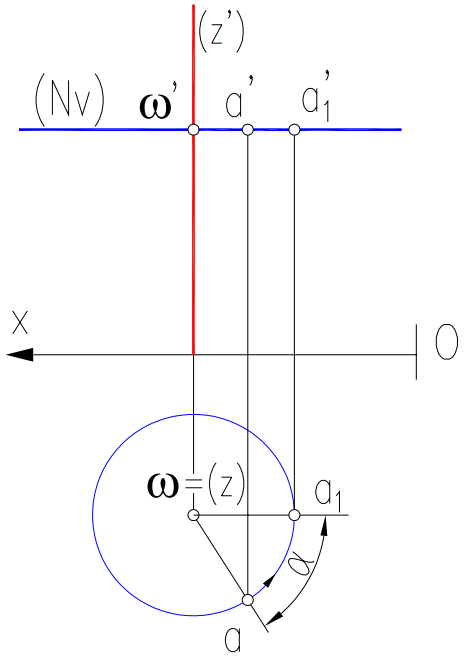


Fig. MII.U3.10

MII.U3.4.2. Rotația de front pentru un punct

În fig. MII.U3.11 este reprezentată spațial rotația unui punct *A* într-un plan de front *[F],* cu un unghi α în jurul unei axe de capăt *(Y)* până ocupă poziția A_1. În fig. MII.U3.12 este prezentată *epura* acestei rotații. Se constată că, în cazul acestei rotații proiecția verticală *a'* a punctului *A* descrie un arc de cerc, iar proiecția orizontală *a* se deplasează pe urma orizontală (F_h) a planului de front în care se efectuează rotația.

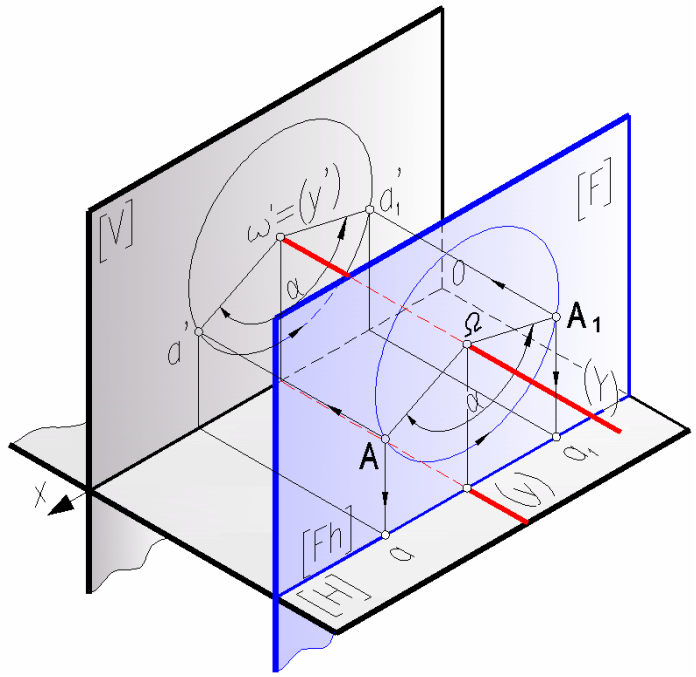


Fig. MII.U3.11

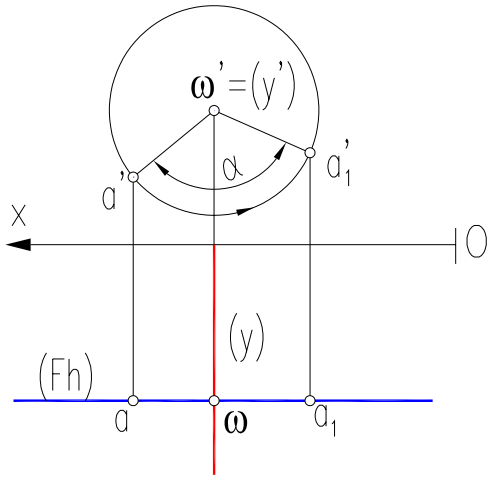


Fig. MII.U3.12

MII.U3.4.3. Rotația de nivel pentru o dreaptă

Pentru a roti o dreaptă oarecare *(D)* în jurul unei axe verticale *(Z)*, este necesar să se rotească cu același unghi α, în același sens, două puncte de pe dreaptă. În fig. MII.U3.13 se prezintă spațial modul în are se rotește dreapta *(D)* definită de punctele *A* și *B* în jurul axei verticale *(Z)*. Pentru simplificare s-a luat axa de rotație *(Z)* concurentă cu dreapta în punctul *A*, care, fiind astfel propriul său rotit, își păstrează proiecțiile *a* și *a'* nemodificate. Rotația s-a făcut astfel încât dreapra să devină o *frontală*, și, în acest fel, să se poată determina în proiecție verticală adevărata mărime a segmentului */AB/* și a unghiului pe care-l face cu planul orizontal de proiecție *[H]*. În fig. MII.U3.14 se prezintă epura acestei rotații. Rotația punctului *B* se face conform explicațiilor de la § MII.U3.4.1.

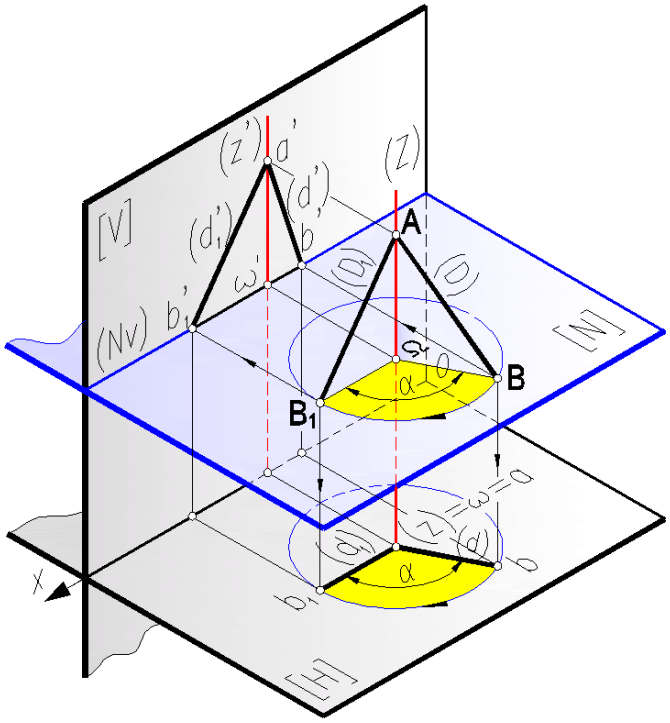


Fig. MII.U3.1 3

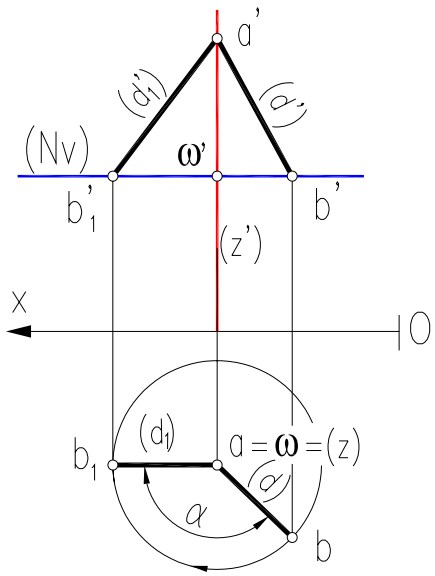


Fig. MII.U3.14

MII.U3.4.4. Rotația de front pentru o dreaptă

Pentru a roti o dreaptă oarecare *(D)* în jurul unei axe de capăt *(Y)*, este necesar să se rotească cu același unghi α, în același sens, două puncte de pe dreaptă. În fig. MII.U3.15 se prezintă spațial modul în are se rotește dreapta *(D)* definită de punctele *A* și *B* în jurul axei de capăt *(Y)*. Pentru simplificare s-a luat axa de rotație *(Y)* concurentă cu dreapta în punctul *B*, care, fiind astfel propriul său rotit, își păstrează proiecțiile *b* și *b'* nemodificate. Rotația s-a făcut astfel încât dreapra să devină o *orizontală*, și, în acest fel, să se poată determina în proiecție orizontală adevărata mărime a segmentului */AB/* și a unghiului pe care-l face cu

planul vertical de proiecție *[V]*. În fig. MII.U3.16 se prezintă *epura* acestei rotații. Rotația punctului *A* se face conform explicațiilor de la § MII.U3.4.2.

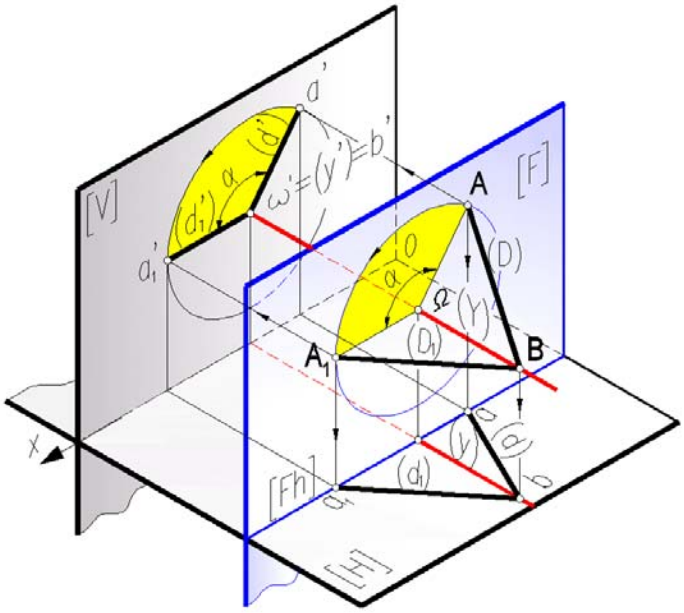


Fig. MII.U3.15

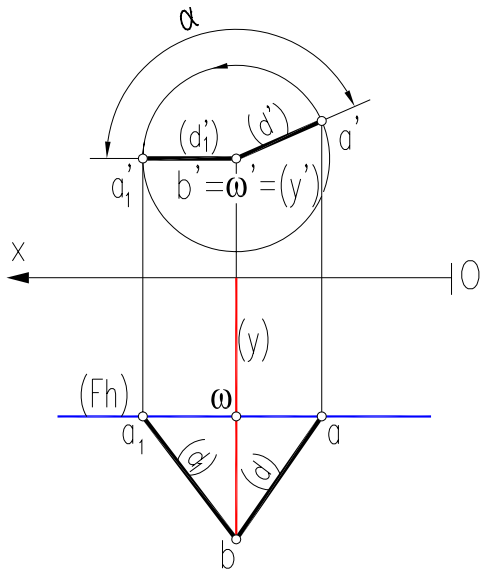


Fig. MII.U3.16

Exemple

1. Se dau cele două proiecții (vederea din față şi vederea de sus) ale unei conducte cu dimensiunile date în fig. MII.U3.17. Se cere să se determine lungimea celor două părți ale conductei (implicit lungimea totală), unghiul pe care-l fac între ele şi distanța dintre capetele acesteia.

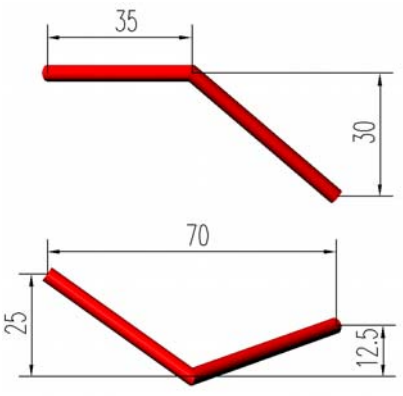


Fig. MII.U3.17

Rezolvare: se consideră cele două conducte ca fiind două drepte concurente, iar cele două vederi tocmai proiecțiile lor verticală şi orizontală.

Plasînd aceste drepte în epură, elementele cerute se pot măsura cu uşurință prin aflarea adevăratei mărimi a triunghiului pe care-l formează aceste drepte în spațiu.

Se propun două soluții:

a) Aflarea adevăratei mărimi a triunghiului prin metoda schimbării planelor de proiecție (fig. MII.U3.18)

Se transformă mai întâi planul triunghiului *ABC* într-un plan de capăt printr-o schimbare de plan vertical de proiecție, prin alegerea noii linii de pământ *(O_1x_1)* perpendiculară pe orizontala *(BC)*.

Dacă *(BC)* n-ar fi fost o orizontală a triunghiului, ca în acest caz, atunci s-ar fi construit o orizontală în planul triunghiului (ca în exemplul din fig. MII.U2.27), apoi s-ar fi ales noua linie de pământ *(O_1x_1)* perpendiculară pe această orizontală.

În continuare se face a doua schimbare de plan de proiecție, de data aceasta de plan orizontal de proiecție. Se transformă astfel triunghiul într-un plan de nivel luîndu-se *(O_2x_2) // ($a_1'b_1'$)*, situație în care adevărata mărime a triunghiului se va regăsi în noua proiecție orizontală $a_2b_2c_2$.

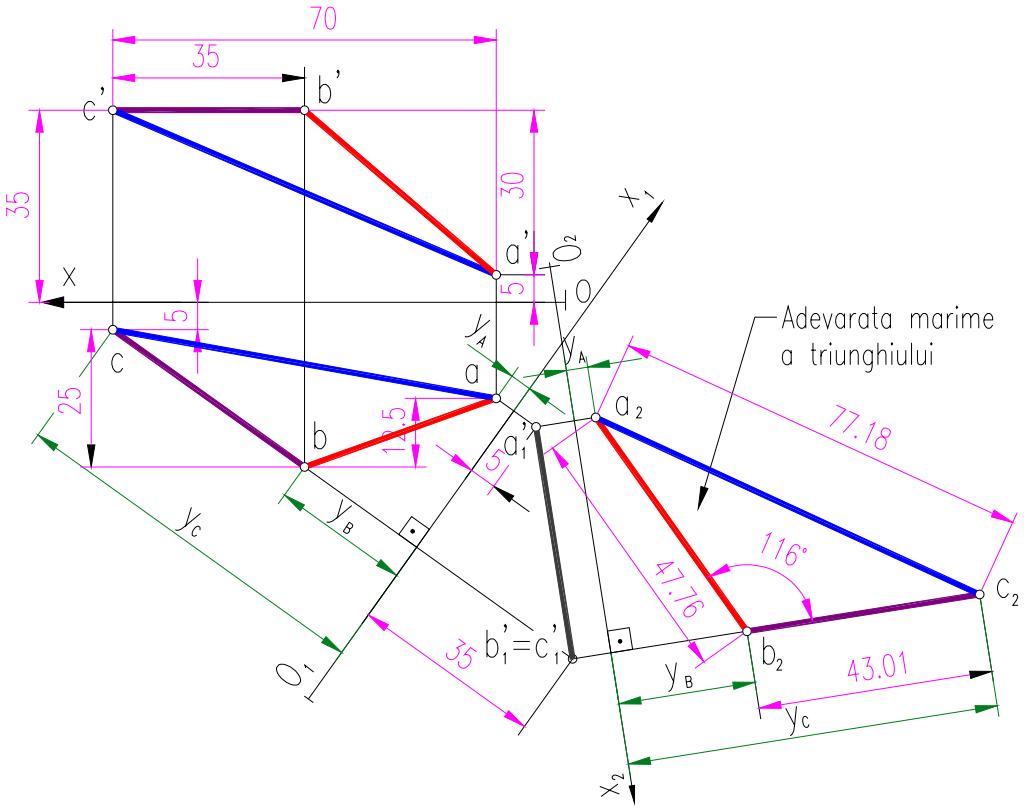


Fig. MII.U3.18

b) Aflarea adevăratei mărimi a triunghiului prin metoda rotației (fig. MII.U3.19).

Se determină lungimea reală a celor trei laturi, apoi se construieşte separat triunghiul *ABC* luând în compas mărimile reale ale acestora.

Segmentul de dreaptă */BC/* fiind o orizontală, adevărata lui mărime este proiecția sa orizontală */bc/* (*// BC/// ≡ // bc//*). În continuare, segmentul de dreaptă

/AB/ se transformă într-o orizontală prin rotație în jurul unei axe de capăt ce trece prin punctul *A*. Rezultă adevărata sa mărime în proiecție orizontală */ab/* (*// AB// ≡ // ab//*). Segmentul de dreaptă */AC/* se transformă într-o frontală prin rotație în jurul unei axe verticale ce trece prin *A*. Rezultă adevărata sa mărime în proiecție verticală */a'c1'/* (*// AC// ≡ // a'c1'//*). Se măsoară aceste segmente în epură, şi se construieşte separat triunghiul *ABC,* luând în compas aceste mărimi (fig. MII.U3.20). În consecință, pe triunghiul astfel obținut se poate măsura şi unghiul dintre laturile */AB/* şi */BC/*.

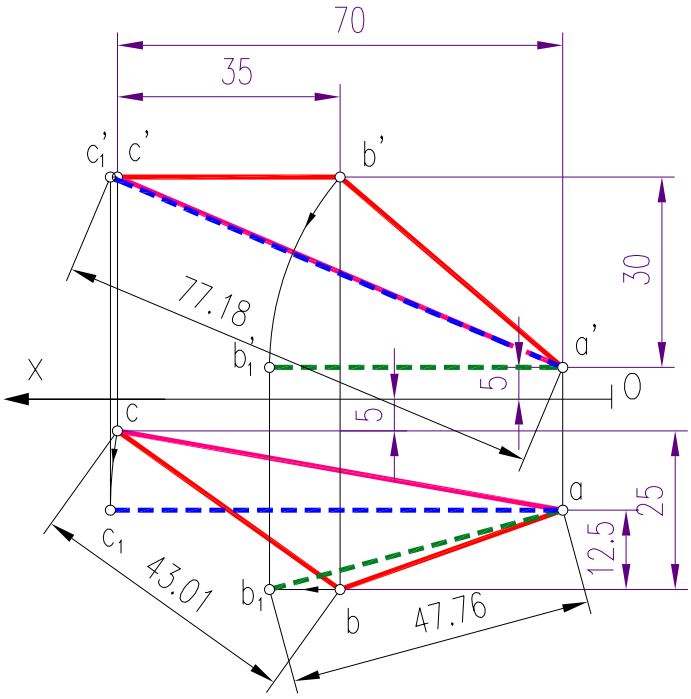


Fig. MII.U3.19

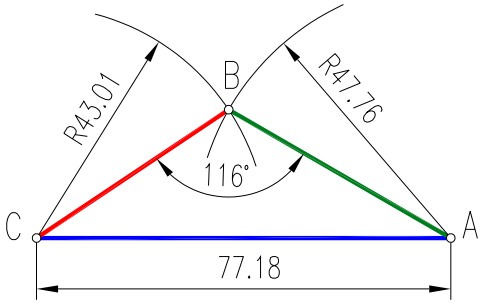


Fig. MII.U3.20

3. Se consideră segmentul de dreaptă */AB/* cu *A(20,50,5)* şi *B(60,10,40)* şi punctul *M(40,5,45)* exterior dreptei. Să se determine adevărata mărime a distanței de la punctul *M* la segmentul */AB/* prin metoda rotației.

Rezolvare (fig. MII.U3.21): se transformă segmentul de dreaptă */AB/* într-o orizontală */A_1B/* prin rotație în jurul unei axe de capăt ce trece prin *B*. Cu același unghi α, în jurul aceleiași axe, în același sens, se rotește și punctul *M*, care ajunge în poziția M_1. Se construiește perpendiculara */M_1N/* pe orizontala */A_1B/* conform teoremei unghiului drept. Segmentul */M_1N/* se transformă, în continuare, într-o frontală (în acest exemplu) prin rotație în jurul unei axe verticale ce trece prin *N*. Proiecția verticală */n'm_2'/* reprezintă adevărata mărime a perpendicularei din *M* pe dreapta */AB/* (*//n'm_2'// ≡ // MN//*).

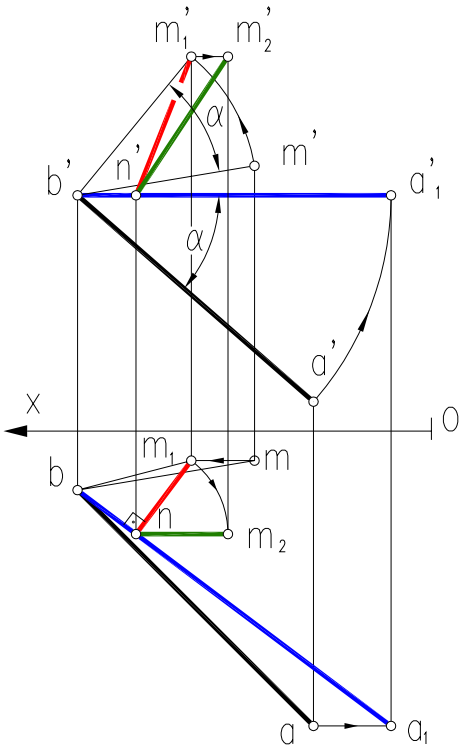


Fig. MII.U3.21

1. Se se construiască proiecțiile orizontală și verticală ale triunghiului *ABC* determinat de punctele *A(98,12,22), B(68,43,50) și C(40,12,10)* și să se afle adevărata mărime a acestuia utilizând metoda schimbării planelor de proiecție.

2. Fie planul *[P]* determinat de punctele *Px(90,0,0), Pz(0,0,60) și Py(0,45,0)* și punctul *M(50,50,60)*. Să se determine distanța de la punctul *M* la planul *[P]* utilizând metoda schimbării planelor de proiecție.

3. Se consideră punctele *M(35,10,25), A(10,30,40), B(70,-20,20)*. Să se afle proiecțiile dreptei *(D)* care conține punctul *M* și este perpendiculară pe dreapta *(AB)* și să se afle distanța de la *M* la *(AB)* prin metoda schimbării planelor de proiecție.

4. Fie segmentul */AB/* dat prin proiecții şi un punct oarecare *M(m,m')∉ /AB/*. Să se determine adevărata mărime a distanței punctului *M* față de segmentul */AB/*, utilizând metoda rotației.

5. Se consideră dreapta (D_1) definită prin punctele *A(123,28,70)*, *B(20,0,0)* şi punctul *C(128,50,45)* exterior acesteia. Prin punctul *C*, să se construiască o dreaptă $(D_2)//(D_1)$ şi să se determine adevărata mărime a distanței dintre aceste drepte.

6. Fiind dat triunghiul *[ABC]* cu datele de la problema 1, să se afle adevarata mărime a acestuia prin metoda rotației.

Să ne reamintim...

- Prin *metoda schimbării planelor de proiecție* se schimbă, pe rând, poziția planelor de proiecție față de elemntele spațiale, de regulă, astfel încât aceste elemente să fie aduse într-o poziție particulară
- Spre exemplu, fiind dat un segment de dreaptă oarecare în spațiu, planul orizontal de proiecție *[H]* poate fi deplasat într-o altă poziție (cu păstrarea perpendicularității pe planul vertical de proiecție), astfel încât să ajungă paralel cu această dreaptă. În noul sistem segmentul de dreaptă devenind dreaptă orizontală se va proiecta în adevarată mărime pe acest plan.

- Acelaşi lucru se poate realiza şi prin schimbarea celorlalte două plane de proiecție, vertical *[V]* şi lateral de proiecție *[L]*.
- Prin *metoda rotației*, elementele geometrice din spațiu sunt aduse în poziții particulare în raport cu unul din planele de proiecție, în urma rotirii acestora în jurul unei axe fixe. Planele de proiecție rămân fixe, iar rotația elementelor geometrice se efectuează în jurul unor axe perpendiculare pe acestea.
- Spre exemplu, fiind dată un segment de dreaptă oarecare în spațiu, acesta se poate roti în jurul unui ax de capăt, concurent cu segmentul, până ce devine dreaptă orizontală, deci, se poate obține astfel adevarata lui mărime în proiecție orizontală.

MII.U3.5. Rezumat

În cadrul acestei unități de învățare s-au definit *metoda schimbării planelor de proiecție* şi *metoda rotației*. Prin aceste tehnici de lucru se realizează transformarea proiecțiilor unor elemente geometrice, aflate în poziții oarecare față de planele de proiecție, în alte poziții care sunt mai avantajoase pentru rezolvarea unor probleme specifice geometriei descriptive sau desenului tehnic.

Prin *metoda schimbării planelor de proiecție* se poate schimba fie numai planul vertical de proiecție *[V]*, fie numai planul orizontal de proiecție *[H]*, fie -

succesiv - ambele plane de proiecție. Planele de proiecție sunt astfel schimbate încât elementul proiectat să ocupe o poziție particulară, în general paralelă, față de planul de proiecție schimbat.

Prin *metoda rotației*, elementele geometrice din spațiu se rotesc în jurul unei axe fixe. Planele de proiecție *[V]* şi *[H]* rămân fixe, iar rotația elementelor geometrice se efectuează în jurul unor axe perpendiculare pe acestea. Metoda se utilizează frecvent pentru aflarea adevăratei mărimi a unor segmente de dreaptă. Dacă axa de rotație este o dreaptă verticală, punctele se rotesc în plane de nivel şi rotația se numeşte *rotație de nivel*. Dacă axa de rotație este o dreaptă de capăt, punctele se rotesc în plane frontale şi rotația se numeşte *rotație de front*.

Explicațiile au fost însoțite de desene spațiale izometrice, de epurele corespunzătoare şi de exemple concludente.

MII.U3.6. Test de evaluare a cunoştințelor

1. În ce constă schimbarea planului orizontal de proiecție? dar a planului vertical de proiecție?

2. Care dintre coordonatele descriptive rămân neschimbate la schimbarea planului vertical de proiecție?

3. Care este succesiunea operațiilor la schimbarea de plan orizontal de proiecție pentru un punct?

4. În ce poziție trebuie adusă o dreaptă oarecare pentru a i se afla adevărata mărime prin schimbare de plan vertical de proiecție?

5. Cum se numeşte planul proiectant în care se deplasează un punct în timpul rotației lui în jurul: unei axe verticale; dar a unei axe de capăt?

6. Pe care din planele de proiecție se proiectează în mărime naturală unghiul de rotație în cazul rotației în jurul unei axe verticale?; dar în jurul unei axe de capăt?

7. Să se explice modul în care un segment de dreaptă oarecare poate fi transformat într-un segment de dreaptă orizontală prin metoda rotației?

8. Să se explice modul în care se poate afla adevărata mărime a unui triunghi oarecare prin metoda rotației?

Unitatea de învățare MII.U4. Metodele geometriei descriptive - II

Cuprins

MII.U4.1. Introducere 98
MII.U4.2. Competențe..... 98
MII.U4.3. Metoda rabaterii. 99
MII.U4.3.1. Rabaterea unui plan oarecare pe planul orizontal de proiecție... 99
MII.U4.3.2. Rabaterea unui plan oarecare pe planul vertical de proiecție... 101
MII.U4.3.3. Rabaterea planelor proiectante..... 102
MII.U4.3.4. Ridicarea din rabatere 105
MII.U4.4. Rezumat..... 109
MII.U4.5. Test de evaluare a cunoştinţelor..... 109
Temă de control 110

MII.U4.1. Introducere

Metoda rabaterii este un caz particular al metodei rotației.

Rabaterea constă în rotirea unui plan în jurul uneia din urmele sale până când acesta se suprapune peste unul din planele de proiecție. Rabaterea unui plan se mai poate efectua şi pe un plan paralel cu unul din planele de proiecție.

Eficiența rabaterii constă în aceea că, în urma unei singure transformări, o figură plană poate ajunge într-un plan de proiecție sau într-un plan paralel cu un plan de proiecție, poziție în care figura respectivă apare în adevărată mărime.

Rabaterea este utilizată cu predilecție la rezolvarea a numeroase probleme metrice, la aflarea adevăratei mărimi a unor figuri plane etc. De asemenea, pornind de la imaginea rabătută, se pot construi proiecțiile, în epură, ale oricărei figuri plane situate în plane oarecare sau particulare.

La sfârşitul unității se formulează şi tema de control a modulului II.

MII.U4.2. Competențe

După parcurgerea materialului acestei unități de învățare studenții vor fi capabili:

- să utilizeze metoda rabaterii planelor oarecare şi a planelor proiectante;
- să determine adevărata mărime a unor segmente de dreaptă, a unor figuri plane şi să determine distanțe şi unghiuri spațiale în adevărată mărime prin utilizarea rabaterii pe planele de proiecție;
- să readucă figuri plane într-un plan prin ridicare din rabatere;

Durata medie de parcurgere a acestei unități de învățare este de 3 ore.

MII.U4.3. Metoda rabaterii

Prin rabatere se înțelege rotirea unui plan *[P]*, oarecare sau proiectant, în jurul uneia din urmele sale, până când acesta se suprapune pe unul din planele de proiecție. Axa de rabatere (rotație) este urma planului *[P]* pe planul de proiecție pe care se efectuează rabaterea.

În timpul rabaterii, diversele puncte situate în planul care se rabate descriu arce de cerc conținute în plane perpendiculare pe axa de rabatere. Un punct situat pe axa de rabatere este, în același timp, propriul său rabătut.

Rabaterea unui plan *[P]* se poate efectua în două sensuri. În epură, se preferă acel sens de rabatere care asigură o claritate corespunzătoare a construcției grafice.

După rabatere, diversele elemente geometrice (segmente de dreaptă, unghiuri, figuri plane), conținute în planul rabătut, apar în adevărata lor mărime.

MII.U4.3.1. Rabaterea unui plan oarecare pe planul orizontal de proiecție

Fie planul *[P]* oarecare (fig. MII.U4.1) care se rabate pe planul orizontal de proiecție *[H]*, rotirea lui având loc în jurul urmei sale orizontale *(Ph),* care reprezintă axa de rabatere. Urma *(Ph)* rămâne nemodificată.

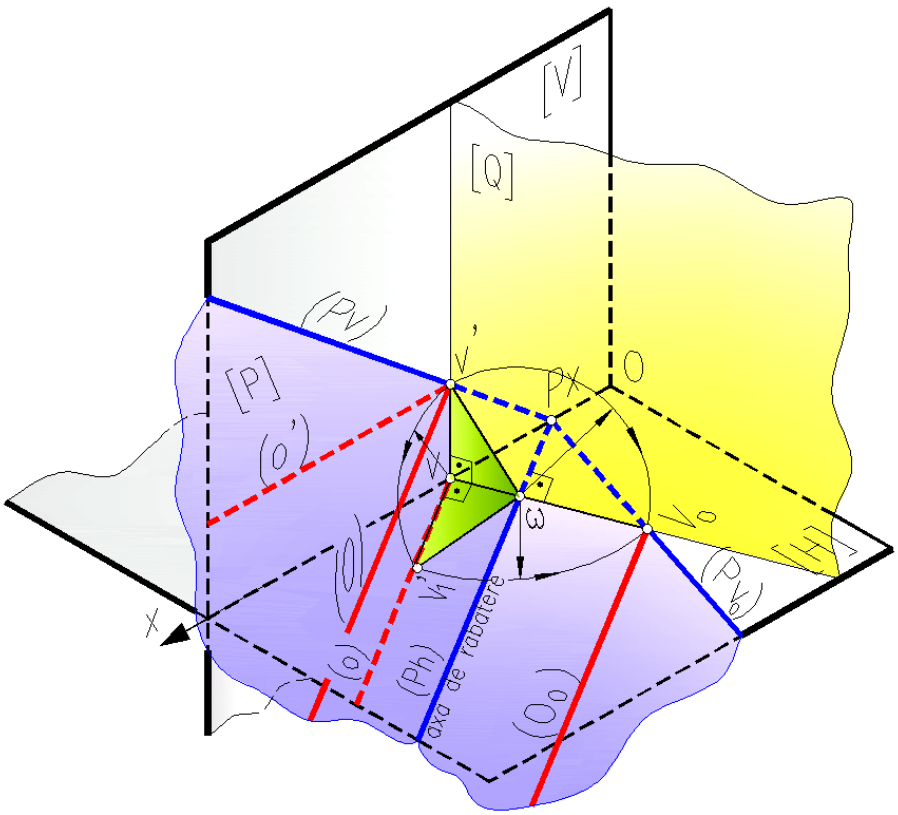


Fig. MII.U4.1

Se consideră punctul *V(v,v')* aparținând urmei verticale *(Pv)* a planului. Acest punct se rotește într-un plan *[Q]* perpendicular pe urma *(Ph)* descriind arcul de cerc de rază */ωv'/* cu centrul în *ω* până când ajunge în planul orizontal de proiecție *[H]* în poziția V_0.

Pentru determinarea poziției rabătute (Pv_0) a urmei verticale a planului în *epură,* se poate proceda în următoarele moduri:

a) Se construiește arcul de cerc de rază */P_x v'/* și perpendiculara din *v* pe *(Ph)* (fig. MII.U4.2). La intersecția arcului cu perpendiculara se obține punctul V_0 rabătutul lui *V*, punct prin care se trasează (Pv_0) unind P_x cu V_0. Această construcție rezultă în urma rabaterii triunghiului dreptunghic $P_x\ \omega v'$ (v. fig. MII.U4.1);

b) Punctul *V* se rabate prin intermediul triunghiului dreptunghic *ωvv'* (v. fig. MII.U4.1). Se rabate acest triunghi în jurul catetei */ωv/* până se așterne în planul orizontal de proiecție *[H],* deci, până ajunge în poziția $\omega v v_1'$. În epură (fig. MII.U4.3) se măsoară */vv'/* și se transpune pe paralela din *v* la *(Ph)*. Se construiește arcul de cerc de rază */$\omega v_1'$/* și, la intersecția cu perpendiculara din *v* rezultă punctul V_0 rabătutul lui *V*, punct prin care se trasează (Pv_0) unind P_x cu V_0.

În ambele epure (fig. MII.U4.2 și fig. MII.U4.3) odată cu punctul *V* s-a efectuat și rabaterea orizontalei *(O)* a planului. Se observă că după rabatere orizontala își păstrează paralelismul cu urma *(Ph)* a planului ($(O_0) \parallel (Ph)$).

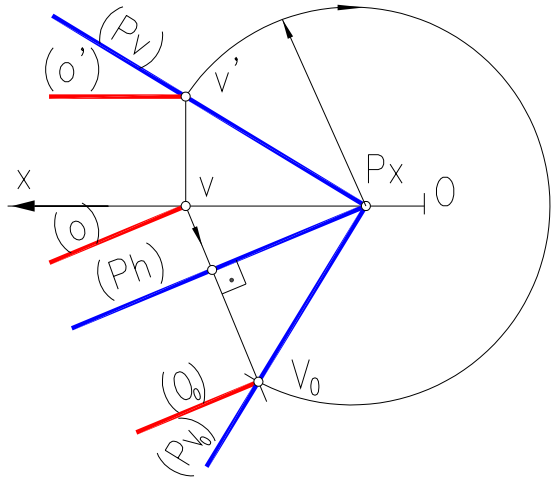


Fig. MII.U4.2

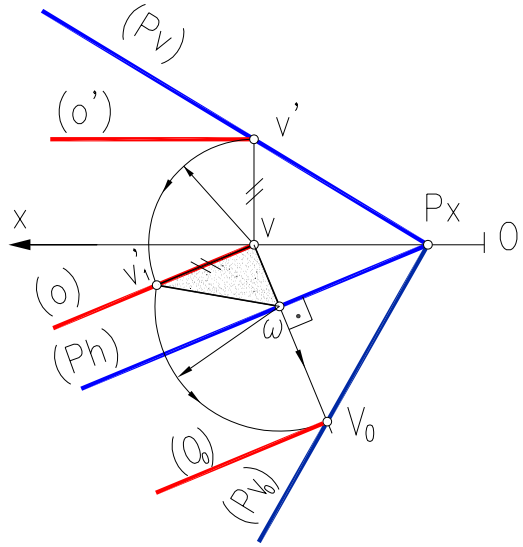


Fig. MII.U4.3

Rabaterea pe planul orizontal de proiecție *[H]* a unui punct *M* situat într-un plan oarecare *[P]* (fig. MII.U4.4 – reprezentare spațială, fig. MII.U4.5 - epură) se poate obține prin rabaterea urmei verticale *(Pv)* și a orizontalei *(O)* care conține acest punct.

O altă metodă prin care se poate face rabaterea directă a punctului *M* este așa numita *metodă a triunghiului de poziție* (fig. MII.U4.4). Se consideră orizontala *(O)* a planului *[P]* și punctul *M* aparținând acestei orizontale. Triunghiul dreptunghic *Mmω* se rabate în jurul

catetei */mω/* până se aşterne în planul orizontal de proiecţie *[H]* . În epură (fig. MII.U4.5) se măsoară din proiecţia *m* pe proiecţia orizontală *(o)* a orizontalei cota punctului *M*. Rezultă *m1'*. Se construieşte arcul de cerc de rază */ω m1'/* (ipotenuza triunghiului de poziţie) care întâlneşte perpendiculara din *m* în punctul M_0, care reprezintă tocmai poziţia rabătută a punctului *M* din plan.

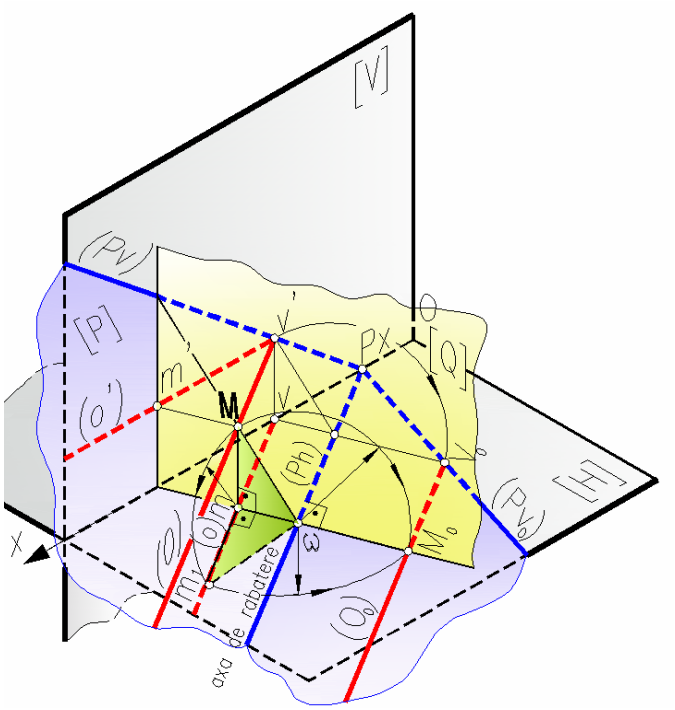


Fig. MII.U4.4

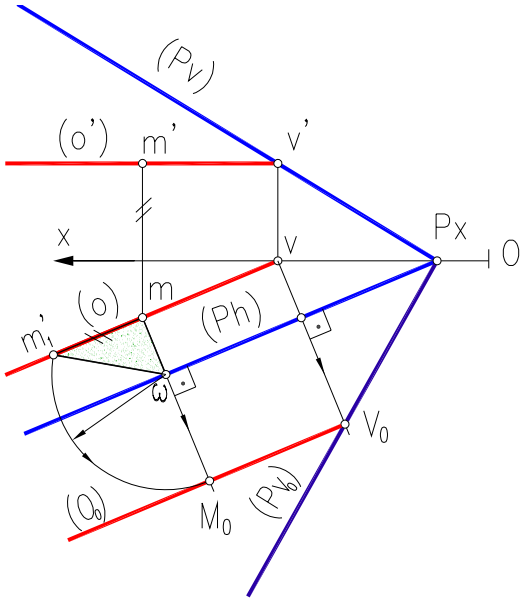


Fig. MII.U4.5

MII.U4.3.2. Rabaterea unui plan oarecare pe planul vertical de proiecţie *[V]*

Rabaterea unui plan oarecare *[P]* în jurul urmei sale verticale *(Pv)* pe planul vertical de proiecţie *[V]* se face conform aceloraşi principii ca şi rabaterea pe planul orizontal de proiecţie (v. §MII.U4.3.1.). La acest tip de rabatere se utilizează, pentru exemplificare, ca elemente de referinţă o frontală *(F)* a planului cu urma sa *H(h, h')* şi triunghiul de poziţie al unui punct *M,* punct situat pe această frontală. În cele ce urmează sunt prezentate următoarele *epure*:

a) Rabaterea prin utilizarea triunghiului dreptunghic P_xhh' (fig. MII.U4.6);

b) Rabaterea prin utilizarea triunghiului dreptunghic $\omega h'h_1$ (fig. MII.U4.7);

c) Rabaterea punctului *M* prin intermediul triunghiului de poziţie $mm_1'\omega$ (fig. MII.U4.8), punctul *M* aparţinând frontalei *(F)* a planului.

În epura din fig. MII.U4.9 se prezintă rabaterea unui plan oarecare *[P],* care conţine dreapta oarecare *(D)* şi punctul *A* pe dreaptă, în jurul urmei verticale *(Pv)*.

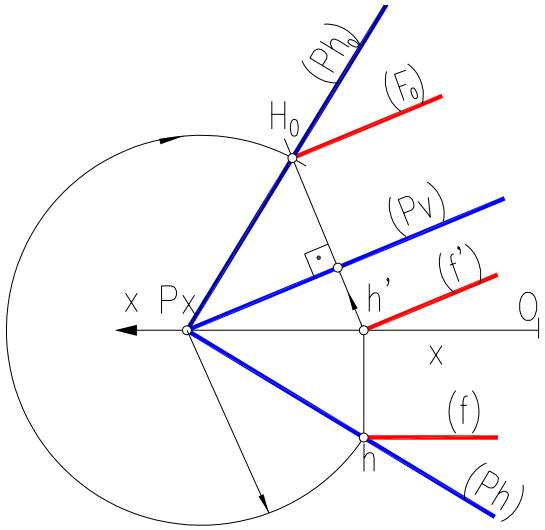


Fig. MII.U4.6

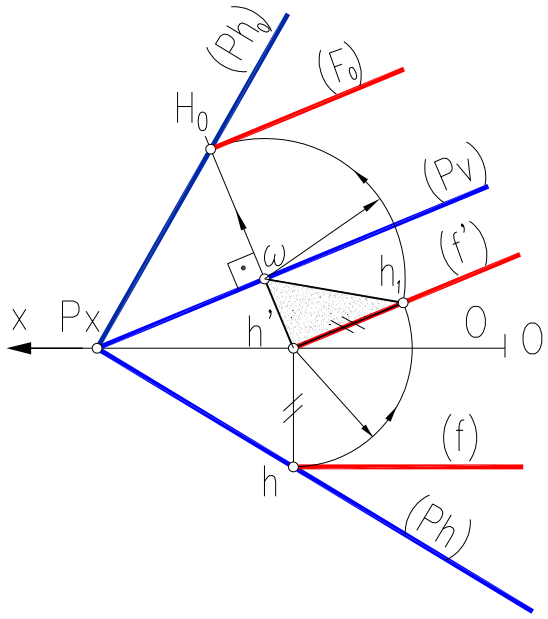


Fig. MII.U4.7

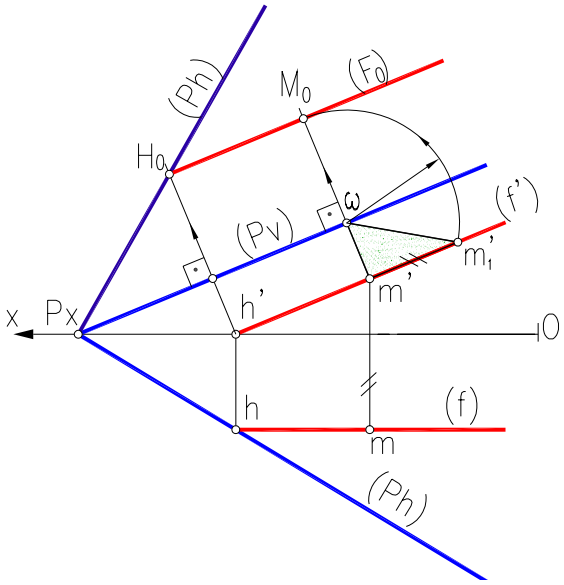


Fig. MII.U4.8

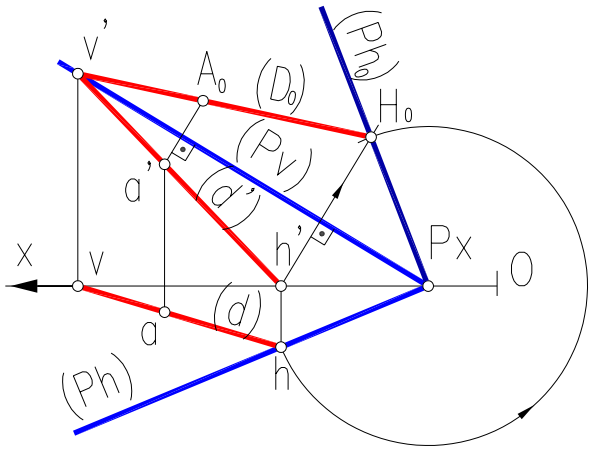


Fig. MII.U4.9

MII.U4.3.3. Rabaterea planelor proiectante

La rabaterea planelor proiectante construcțiile în epură se simplifică datorită faptului că urmele acestor plane sunt perpendiculare între ele.

• ***Rabaterea unui plan de capăt [P] pe planul orizontal de proiecție [H]*** se prezintă spațial în fig. MII.U4.10 şi în epură în fig. MII.U4.11.

Axa de rabatere este urma *(Ph)*. Urma verticală *(Pv)*, după rabatere, rămâne perpendiculară pe *(Ph)*, deci *(Pv_0)* se va suprapune peste axa *(Ox)*. Triunghiul *ABC* conținut în acest plan se va regăsi în adevărată mărime în poziția $A_0B_0C_0$.

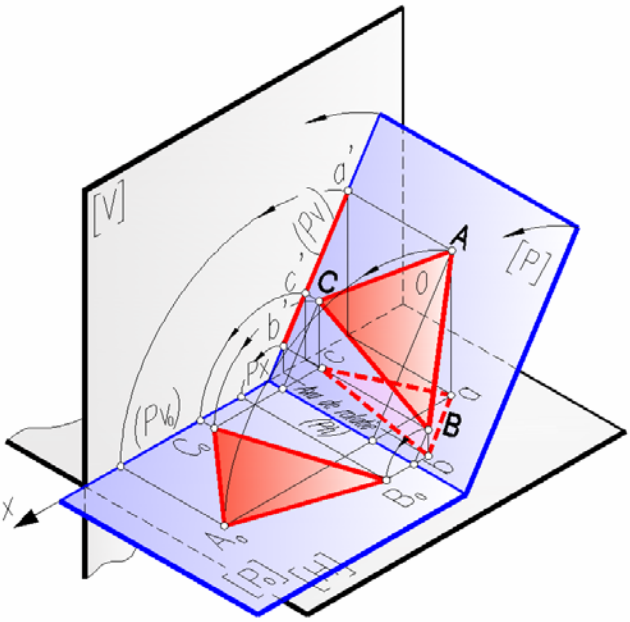


Fig. MII.U4.10

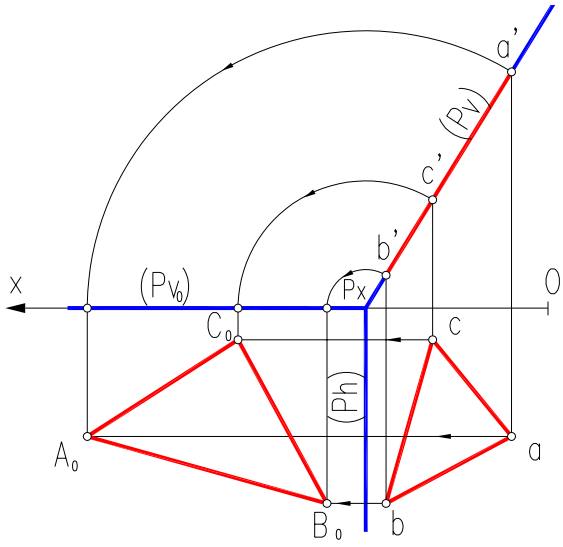


Fig. MII.U4.11

• ***Rabaterea unui plan de capăt [P] pe planul vertical de proiecție [V]*** se prezintă spațial în fig. MII.U4.12 şi în epură în fig. MII.U4.13.

Axa de rabatere este urma *(Pv)*. Urma orizontală *(Ph),* după rabatere, rămâne perpendiculară pe *(Pv)* şi devine *(Pv0)*. Triunghiul *ABC* conținut în acest plan se va regăsi în adevărată mărime în poziția $A_0B_0C_0$. Dacă se consideră că punctele *A, B, C* aparțin unor drepte de capăt ale planului, după rabatere punctele A_0, B_0, C_0 se vor situa pe aceste drepte rabătute, paralele în poziție rabătută cu *(Ph0)* sau perpendiculare pe *(Pv)*.

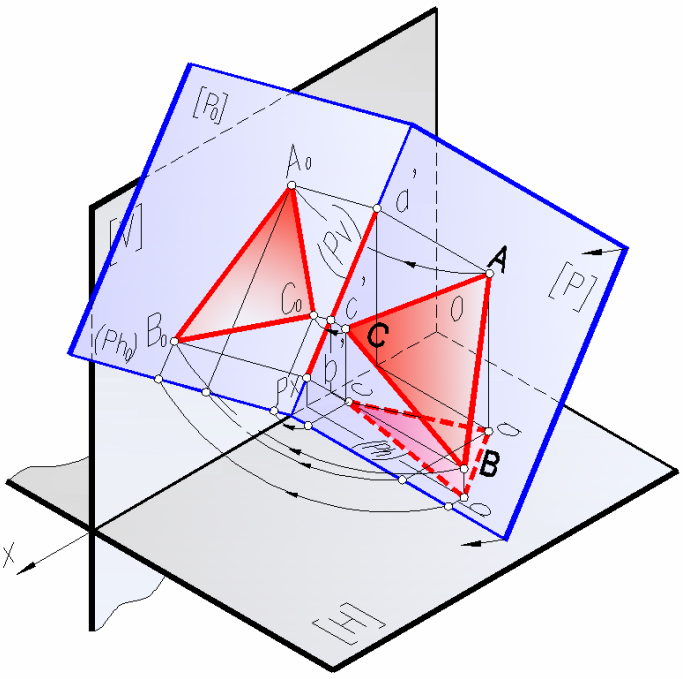


Fig. MII.U4.12

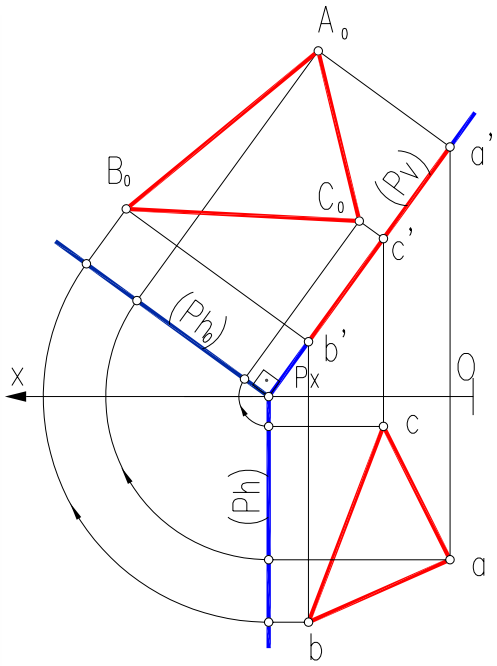


Fig. MII.U4.13

• ***Rabaterea unui plan vertical [P] pe planul orizontal de proiecție [H]*** se prezintă spațial în fig. MII.U4.14 şi în epură în fig. MII.U4.15. Axa de rabatere este urma *(Ph)*. Urma verticală *(Pv),* după rabatere *(Pv_0)*, rămâne perpendiculară pe *(Ph)* şi devine *(Ph_0)*. Triunghiul *ABC* conținut în acest plan se va regăsi în adevărată mărime în poziția $A_0B_0C_0$.

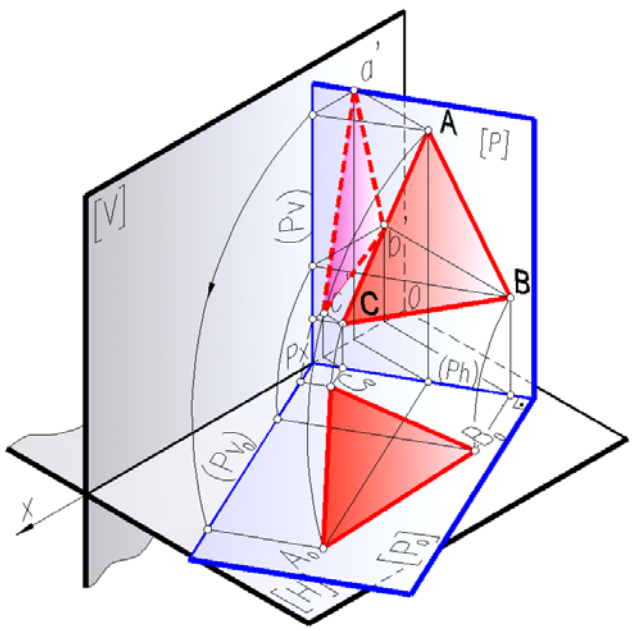


Fig. MII.U4.14

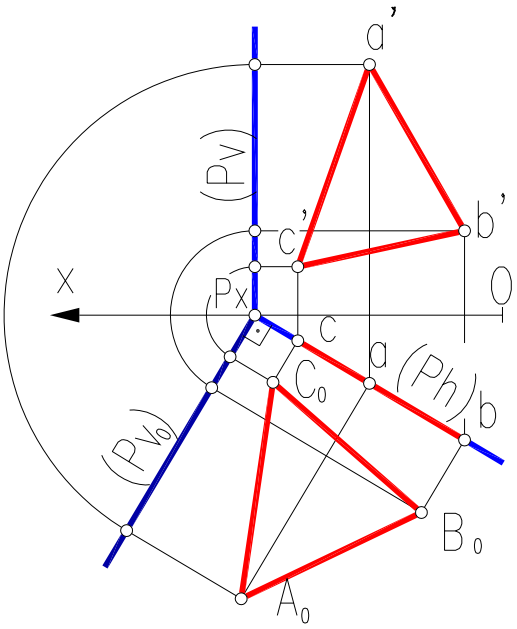


Fig. MII.U4.15

• ***Rabaterea unui plan vertical [P] pe planul vertical de proiecție [V]*** se prezintă spațial în fig. MII.U4.16 şi în epură în fig. MII.U4.17. Axa de rabatere este urma *(Pv)*. Urma orizontală *(Ph),* după rabatere *(Ph_0)* se suprapune peste axa *(Ox)*. Triunghiul *ABC* conținut în acest plan se va regăsi în adevărată mărime în poziția $A_0B_0C_0$.

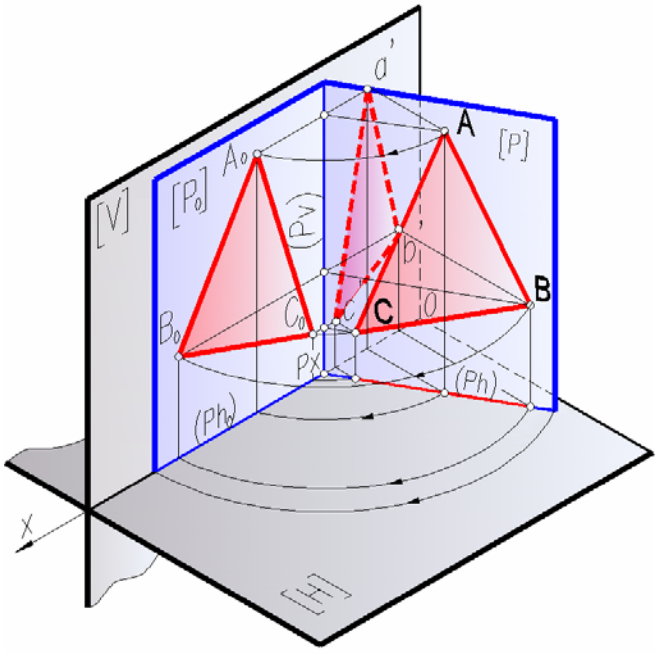


Fig. MII.U4.16

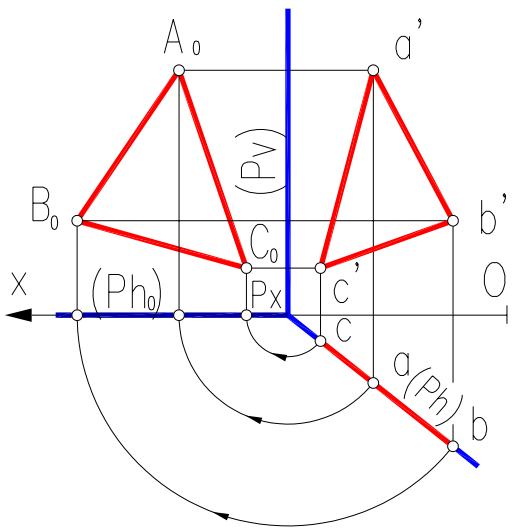


Fig. MII.U4.17

MII.U4.3.4. Ridicarea din rabatere

Ridicarea din rabatere este operația inversă rabaterii. Prin ridicarea din rabatere o figură plană existentă sau construită în planul rabaterii poate fi readusă în planul care a fost rabătut.

Fie $\Delta A_0B_0C_0$ oarecare dat în poziție rabătută în planul orizontal de proiecție *[H]* şi planul *[P]* oarecare în care trebuie ridicat acest triunghi (fig. MII.U4.18). Planul *[P]* fiind date prin urme, se determină mai întâi poziția rabătută *(Pv_0)* a urmei verticale *(Pv),* spre exemplu. Se vor plasa, în continuare, punctele A_0, B_0, C_0 pe drepte orizontale ale planului, care se ridică din rabatere, operațiile fiind făcute în sens invers celor studiate în cadrul rabaterii planului oarecare (în acest exemplu, rabaterea fiind făcută pe planul orizontal de proiecție).

În fig. MII.U4.19 se prezintă *epura* ridicării din rabatere a unui cerc într-un plan de capăt. Planul *[P]* fiind un plan proiectant proiecția orizontală a cercului ridicat în plan va fi o elipsă cu axa mare dreapta de capăt *(CG)* egală cu diametrul cercului, iar axa mică frontala *(AE)*.

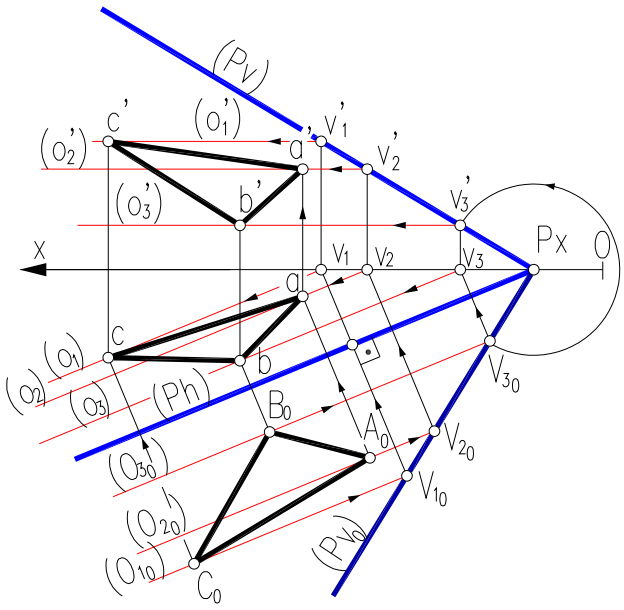


Fig. MII.U4.18

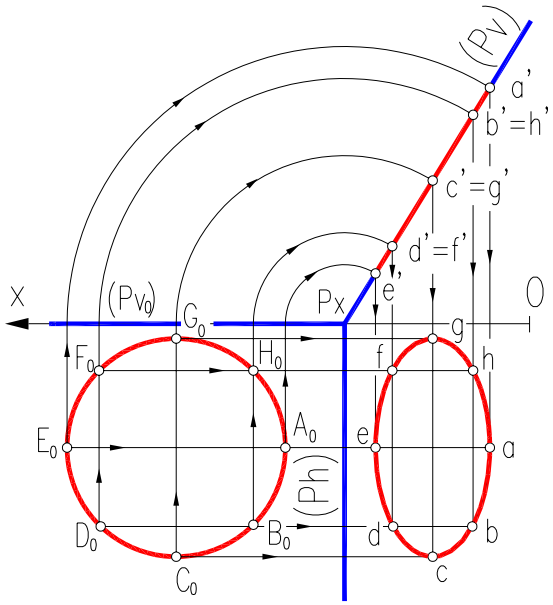


Fig. MII.U4.19

Exemple

1. Se cere realizarea construcției din tablă din fig. MII.U4.20. Atât cilindrul cât şi pereții carcasei sunt realizați din tablă. Construcția se obține prin sudarea elementelor între ele.

Rezolvare: realizarea cilindrului şi a pereților superior şi inferior se face cu uşurință, pe baza unor elemente de geometrie plană, după realizarea pereților laterali.

Confecționarea pereților laterali, dispuşi simetric față de planul median al

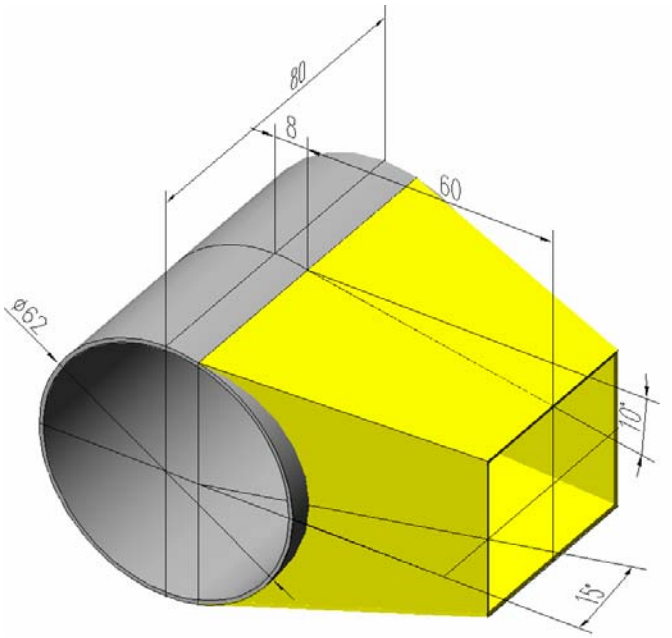


Fig. MII.U4.20

construcției, presupune determinarea curbei de intersecție a acestora cu suprafața cilindrică, precum şi determinarea celorlalte dimensiuni.

În fig. MII.U4.21 se prezintă *epura* acestei rezolvări. Se consideră peretele lateral plasat într-un plan vertical *[P]* care se rabate în jurul urmei sale verticale *(Pv)* peste planul vertical de proiecție *[V]*.

După rabatere rezultă forma exactă a curbei de decupare a peretelui lateral (un arc de elipsă), precum şi celelalte dimensiuni.

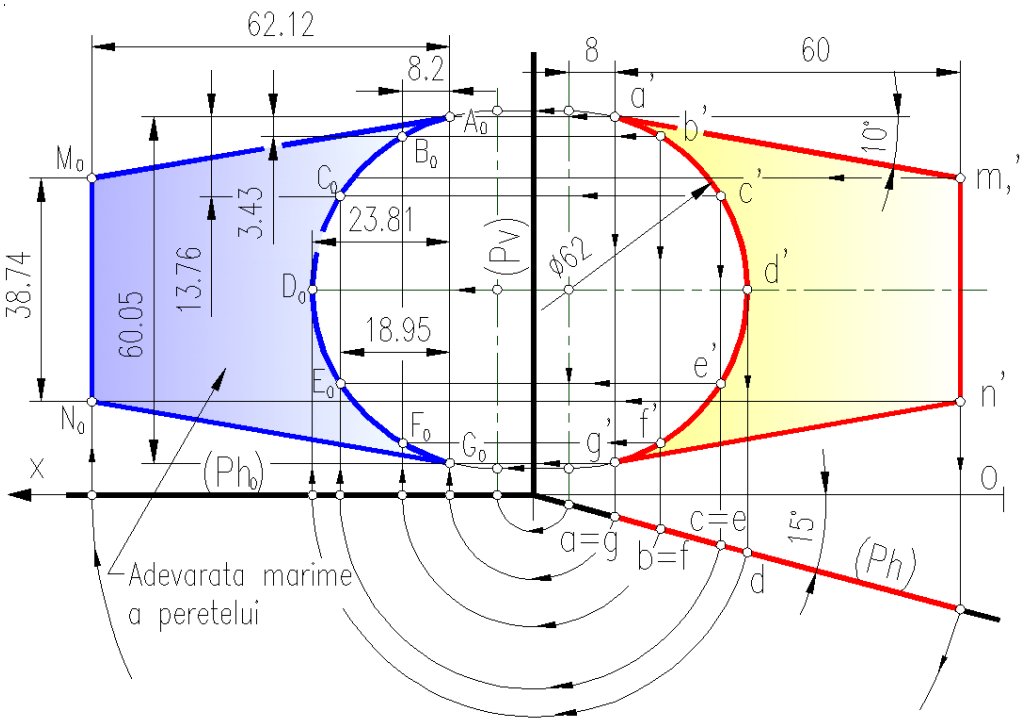


Fig. MII.U4.21

2. Fie planul de capăt *[P](Ph,,Pv)*, aflat sub un unghi de 45^0 față de planul *[H]* de proiecție, având *Px(60,0,0)*. În planul *[P]* să se construiască hexagonul regulat înscris într-un cerc cu raza *R = 25mm* şi având centrul în *Ω* de abcisă *x=30mm* şi cotă egală cu depărtarea (fig. MII.U4.22).

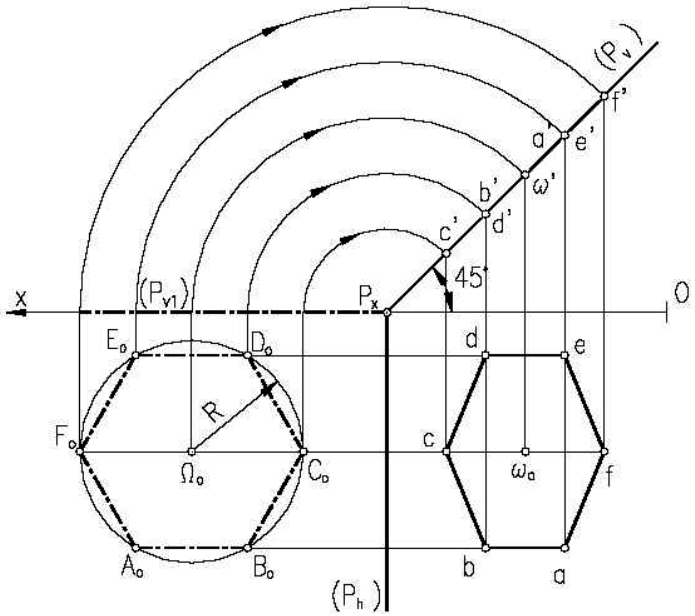


Fig. MII.U4.22.

Indicație:
Se rabate planul *[P]*, împreună cu punctul *Ω(ω,ω')*, în planul *[H]* de proiecție. Se construieşte, în poziție rabătută, hexagonul *[$A_0B_0C_0D_0E_0F_0$]* înscris în cercul de rază dată *R*. Se ridică rabaterea şi se obțin proiecțiile hexagonului (v. fig. MII.U4.4.22).

2. Să se construiască proiecțiile hexagonului regulat *[ABCDEF]*, circumscris unui cerc cu centrul în *Ω(38,24, z_ω)* şi raza *R=22* mm conținut în planul *[P]* dat prin *Px(100,0,0)*, având urma verticală înclinată cu 45° spre dreapta şi urma orizontală înclinată cu 37° spre dreapta.

Indicație (Fig. MII.U4.23): în planul *[P]* rabătut în planul orizontal de proiecție odată cu orizontala planului care conține punctul *Ω* , se construieşte hexagonul regulat *[$A_0B_0C_0D_0E_0F_0$]* circumscris cercului de rază 22. Vârfurile hexagonului sunt situate pe orizontale ale planului care se ridică din rabatere. Proiecțiile cercului înscris în hexagon sunt elipse. În plan vertical elipsa are axa mare situată pe o frontală a planului, iar axa mică pe linia de cea mai mare pantă față de planul vertical de proiecție. În plan orizontal axa mare a elipsei este pe orizontala planului ce trece prin Ω, iar axa mică pe d.c.m.m.p. față de planul *[H]*.

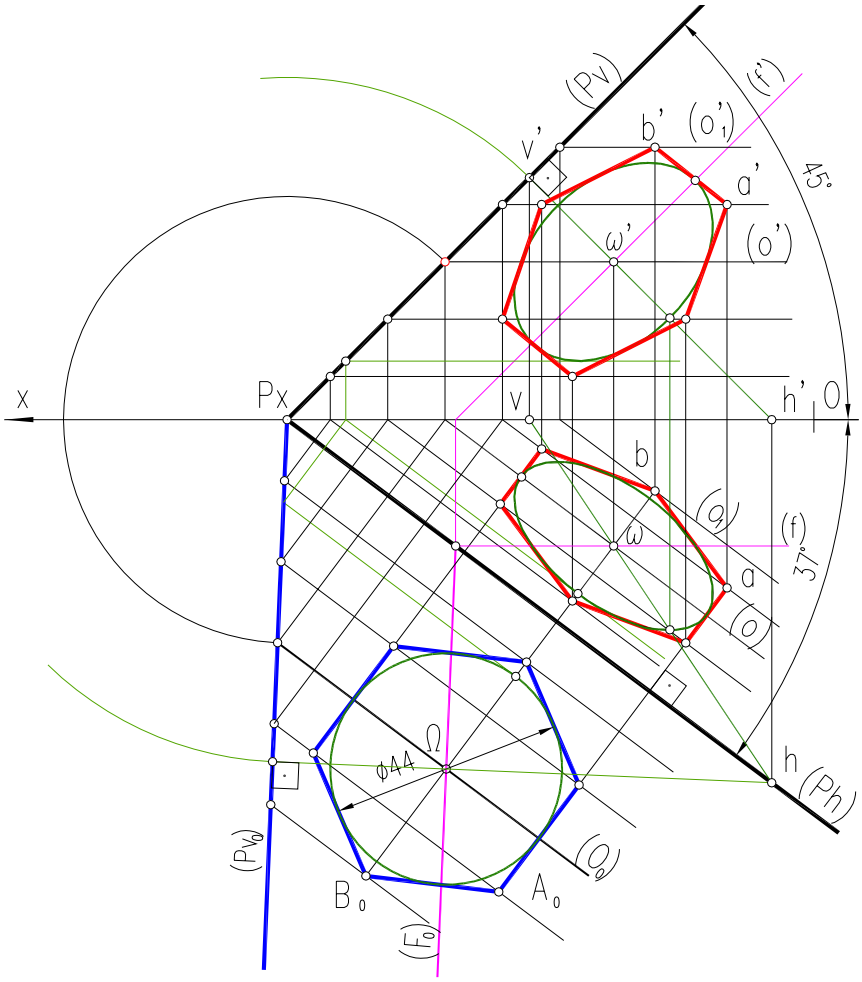


Fig. MII.U4.23

1. După rabaterea planului *[P]* pe planul orizontal de proiecție să se găsească poziția punctului A, care aparține planului şi căruia i se cunoaşte proiecția orizontală. Se vor alege plane oarecare şi plane particulare.

2. Să se găsească distanța de la un punct la o dreaptă oarecare.

3. Să se construiască proiecțiile pentagonului regulat *ABCDE* înscris într-un cerc cu centrul în *Ω(30, 20, ?)* de rază *R=20 mm*, conținut în planul *[P]* dat prin *Px(80,0,0), H(10,60,0) şi V(65,0,20).*

Indicație: se determină proiecția verticală a lui *Ω* plasându-l pe o orizontală a planului. Se rabate planul oarecare *[P]* împreună cu *Ω* în planul orizontal de proiecție. Se construieşte în poziția rabătută pentagonul regulat cu centrul în *Ω* şi de rază *R*. Vârfurile pentagonului se situează pe orizontale ale planului. Se ridică apoi din rabatere.

Să ne reamintim...

- Rabaterea constă în rotirea unui plan în jurul uneia din urmele sale până când acesta se suprapune peste unul din planele de proiecție.
- Prin *metoda rabaterii* se pot rezolva numeroase probleme metrice, se poate afla adevărata mărime a unor figuri plane.
- La rabaterea planelor proiectante construcțiile în epură se simplifică datorită faptului că urmele acestor plane sunt perpendiculare între ele.
- O altă metodă prin care se poate face rabaterea directă a unui punct dintr-un plan dat este aşa numita *metodă a triunghiului de poziție.*
- *Ridicarea din rabatere* este operația inversă rabaterii. Prin ridicarea din rabatere o figură plană existentă sau construită în planul rabaterii poate fi readusă în planul care a fost rabătut.

MII.U4.4. Rezumat

În cadrul acestei unități de învățare s-a definit *metoda rabaterii,* care este un caz particular al metodei rotației. Rabaterea constă în rotirea unui plan în jurul uneia din urmele sale până când acesta se suprapune peste unul din planele de proiecție. Prin rabatere, în urma unei singure transformări, o figură plană poate ajunge într-un plan de proiecție sau într-un plan paralel cu un plan de proiecție, poziție în care figura respectivă apare în adevărată mărime.

Pornind de la imaginea rabătută, se pot construi, în epură, proiecțiile oricărei figuri plane situate în plane oarecare sau în plane particulare.

Explicațiile au fost însoțite de desene spațiale izometrice, de epurele corespunzătoare şi de exemple concludente.

MII.U4.5. Test de evaluare a cunoştințelor

1. În ce constă metoda rabaterii?

2. Care sunt modalitățile de determinare a poziției rabătute *(Pv_0)* a urmei verticale a planului oarecare în *epură*?

3. Care sunt modalitățile de determinare a poziției rabătute *(Ph_0)* a urmei orizontale a planului oarecare în *epură*?

4. Care sunt modalitățile de determinare a poziției rabătute *(Pv_0)* a urmei verticale a planului de capăt în *epură*?

5. Care sunt modalitățile de determinare a poziției rabătute *(Ph_0)* a urmei orizontale a planului vertical în *epură*?

6. Ce înseamnă ridicarea din rabatere?

Temă de control

1. Se dau punctele *A(95,5,25)*, *B(50,50,5),* C(30,20,70) care determină triunghiul *ABC* şi punctul *M(75,55,70-n)* exterior planului triunghiului.

a) Să se construiască perpendiculara din punctul *M* pe planul triunghiului *ABC* fără a determina urmele planului; să se găsească punctul *R* de intersecție al perpendicularei cu placa triunghiulară şi să se stabilească vizibilitatea acesteia considerând triunghiul o suprafață opacă (v. exemplul 2 din MII.U2);

b) Să se afle adevărata mărime a segmentului */MR/* prin metoda rotației (v. § MII.U3.3);

c) Să se rabată planul triunghiului *ABC*, inclusiv punctul *R*, pe planul orizontal de proiecție (v. § MII.U4.3.1).

(*Indicație*: se pot construi urmele planului, eventual pe o epură separată pentru a nu aglomera desenul, luând două laturi ale triunghiului - drepte concurente - prin determinarea urmelor acestora. La rabatere, punctele *A, B, C, R* se pot situa pe orizontale sau frontale ale planului).

- Rezolvarea temei se va face pe un format A3, liniat, în creion, cu instrumente de desen. Se recomandă folosirea creioanelor colorate.
- *"n"* reprezintă numărul de ordine al studentului în catalog.
- Tema de control se va preda la data anunțată în cadrul seminariilor.

Modulul III. Poliedre şi corpuri cilindro-conice

Cuprins

Introducere 111
Competențe 111
MIII.U1. Poliedre 112
MIII.U2. Corpuri cilindro-conice 128
MIII.U3. Intersecția corpurilor geometrice 141

Introducere

În acest modul se analizează, pentru început, modalitățile de reprezentare în epură a poliedrelor, în speță prisma şi piramida. Se prezintă tehnicile de lucru pentru obținerea secțiunilor plane şi a desfăşuratelor acestor corpuri.

Dintre corpurile de rotație, se analizează în detaliu cilindrul şi conul şi modul lor de reprezentare. Ca şi în cazul prismei şi piramidei se prezintă secțiuini plane prin cilindu şi con, precum şi tehnicile de lucru pentru obținerea desfăşuratelor acestor suprafețe.

În final, se analizează intersecția acestor corpuri, cu determinarea curbelor de intersecție.

Competențe

La sfârşitul acestui modul cursanții vor fi capabili:

- să cunoască ce sunt poliedrele regulate şi neregulate ce proprietăți au şi cum se reprezintă acestea în epură;
- să realizeze secțiuni plane prin poliedre, în speță prin prismă şi piramidă, şi să afle adevărata mărime a acestor secțiuni;
- să construiască desfăşuratele poliedrelor, în speță desfăşuratele piramidei şi prismei sau a trunchiului de piramidă sau de prismă;
- să rezolve intersecții de poliedre;
- să cunoască cilindrul şi conul, şi modul lor de reprezentare în epură;
- să realizeze secțiuni plane în cilindru şi con;
- să desfăşoare suprafețe cilindro-conice;
- să rezolve intersecții dintre suprafețe cilindro-conice.

Unitatea de învățare MIII.U1. Poliedre

Cuprins

MIII.U1.1. Introducere 112
MIII.U1.2. Competențe 112
MIII.U1.3. Definiție şi clasificare. 113
MIII.U1.3.1. Poliedre regulate 113
MIII.U1.3.2. Poliedre neregulate 114
MIII.U1.4. Reprezentarea poliedrelor 115
MIII.U1.5. Secțiuni plane prin poliedre 116
MIII.U1.5.1.Secțiuni plane prin prismă şi piramidă 116
MIII.U1.6. Desfăşurarea poliedrelor 118
MIII.U1.6.1. Desfăşurarea prismei..... 119
MIII.U1.6.2. Desfăşurarea piramidei 122
MIII.U1.7. Rezumat 127
MIII.U1.8. Test de evaluare a cunoştințelor..... 127

MIII.U1.1. Introducere

Poliedrele sunt corpuri geometrice mărginite de fețe poligonale plane.
În cadrul acestei unități de învățare se definesc şi se clasifică poliedrele, se explică modul de reprezentare a acestora şi se analizează criteriile de vizibilitate.
Dintre poliedrele frecvent întâlnite în forma obiectelor tehnice se detaliază prisma şi piramida. Se explică modul de obținere a secțiunilor plane şi a desfăşuratelor acestor corpuri.

MIII.U1.2. Competențe

După parcurgerea materialului acestei unități de învățare studenții vor fi capabili:

- să definească poliedrele regulate şi neregulate şi să le reprezinte în epură ținând cont şi de aspectul vizibilității;
- să realizeze secțiuni plane prin poliedre, în speță prin prismă şi piramidă, şi să afle adevărata mărime a acestor secțiuni;
- să desfăşoare piramida şi prisma sau trunchiurile de piramidă şi prismă rezultate în urma secționarii acestora cu plane oarecare sau particulare;

Durata medie de parcurgere a acestei unități de învățare este de 3 ore.

MIII.U1.3. Definiții şi clasificare

Un *poliedru* este un corp geometric mărginit de fețe plane. Fețele sale sunt poligoane cu un anumit număr de laturi. Laturile poligoanelor constituie şi *muchiile* poliedrului şi rezultă din intersecția a două fețe alăturate. Mai multe muchii ale unui poliedru sunt concurente într-un punct numit *vârf*. Un vârf este un punct comun pentru cel puțin trei muchii ale unui poliedru.

După modul cum sunt dispuse fețele unui poliedru acestea se clasifică în:

- *poliedre convexe* la care nici unul din planele fețelor nu taie poliedrul;
- *poliedre concave* la care unele din fețe taie poliedrul.

Poliedrele mai pot fi clasificate în *poliedre regulate* şi *poliedre neregulate* în funcție de poziția, forma fețelor, a unghiurilor diedre şi poliedre şi a inscriptibilității în sferă.

MIII.U1.3.1. Poliedre regulate

Poliedrele regulate sunt poliedrele care au următoarele proprietăți:

- toate fețele sunt poligoane regulate egale;
- vârfurile sunt unghiuri solide regulate egale;
- sunt inscriptibile în sferă, cât şi circumscribile sferei.

Există *cinci* poliedre regulate: *tetraedrul regulat* (fig. MIII.U1.1), *cubul (hexaedrul)* (fig. MIII.U1.2), *octaedrul regulat* (fig. MIII.U1.3), *dodecaedrul regulat* (fig. MIII.U1.4) şi *icosaedrul regulat* (fig. MIII.U1.5).

Fig. MIII.U1.1

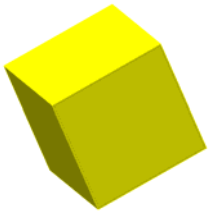


Fig. MIII.U1.2

Fig. MIII.U3.

Fig. MIII.U1.4

Fig. MIII.U1.5

La aceste poliedre *Euler* a stabilit următoarea relație între numărul de vârfuri (**V**), muchii (**M**) şi fețe (**F**): **V – M + F = 2**.

În tabelul MIII.U1.1 sunt prezentate toate aceste elemente pentru fiecare din aceste poliedre.

Tabelul MIII.U1.1

Nr.	Denumire	Vârfuri (V)	Muchii (M)	Fețe (F)
1	Tetraedrul regulat	4	6	4
2	Cubul (hexaedrul)	8	12	6
3	Octaedrul regulat	6	12	8
4	Dodecaedrul regulat	20	30	12
5	Icosaedrul regulat	12	30	20

Denumiți cele șase poliedre regulate și enumerați proprietățile lor.

În fig. MIII.U1.6 se prezintă construcția unui *tetraedru regulat* așezat cu una din fețe în planul orizontal de proiecție într-o poziție oarecare și având cunoscută lungimea muchiei *l*. Se construiește proiecția orizontală a tetraedrului, respectiv triunghiul echilateral *abc* de latură *l*. La intersecția înălțimilor se găsește proiecția orizontală *s* a celui de-al treilea vârf. Pentru construcția proiecției verticale este necesară cunoașterea cotei proiecției *s'*. În acest scop se construiește *triunghiul de poziție* al punctului *S*. Se rabate triunghiul dreptunghic din spațiu *SIC* pe planul orizontal de proiecție *[H]* în jurul catetei */CI/*. În epură se ia în compas proiecția */ca/* (lungimea *l* a laturii – ipotenuza) și la intersecția acestui arc de cerc cu perpendiculara ridicată din *s= i* pe */ci/* se obține poziția rabătuta S_0 a vârfului *S*. Se măsoară */S_0i/* cota z_S a punctului *S* și se transpune în proiecție verticală.

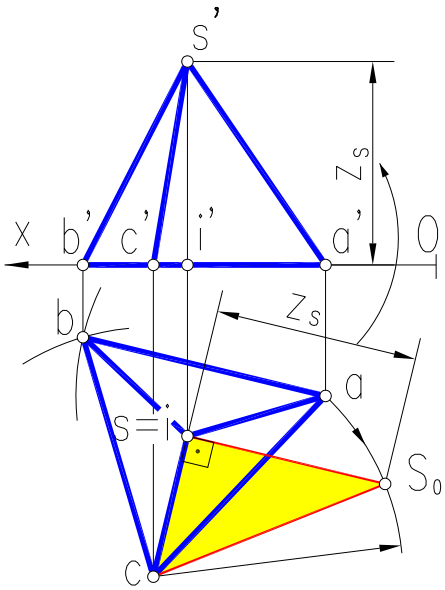


Fig. MIII.U1.6

MIII.U1.3.2. Poliedre neregulate

Poliedrele care nu respectă proprietățile enumerate la § MIII.U1.1 (pentru poliedre regulate) se numesc *poliedre neregulate*. Dintre poliedrele neregulate frecvent întâlnite în alcătuirea formelor constructiv-tehnologice din domeniul construcției de mașini sunt *prisma* și *piramida*.

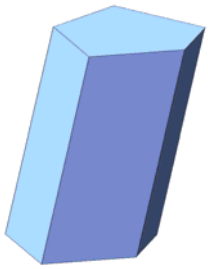


Fig. MIII.U1.7

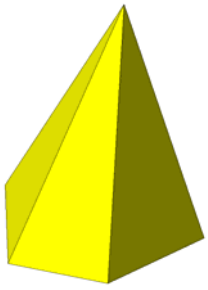


Fig. MIII.U1.8

Prisma (fig. MIII.U1.7) este poliedrul ale cărui muchii, rezultate din intersecția fețelor laterale, sunt parelele între ele, iar bazele sunt egale între ele și paralele. Dacă muchiile sunt perpendiculare pe planul bazei, prisma se numește *prismă dreaptă*, iar dacă muchiile sunt înclinate față de planul bazei, prisma se numește *prismă oblică*.

Piramida (fig. MIII.U1.8) este poliedrul ale cărui muchii laterale sunt concurente într-un punct numit *vârf*, iar baza este un poligon. Fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri. Dacă vârful piramidei se proiectează în centrul bazei piramida este *dreaptă*, în caz contrar este *oblică*.

MIII.U1.4. Reprezentarea poliedrelor

Reprezentarea unui poliedru în *epură* se reduce la reprezentarea muchiilor acestuia (segmente de dreaptă) în proiecțiile corespunzătoare şi la determinarea vizibilității. În fig. MIII.U1.9 se prezintă spațial modul de obținere a proiecțiilor unei piramide, iar în fig. MIII.U1.10 epura acestei reprezentări.

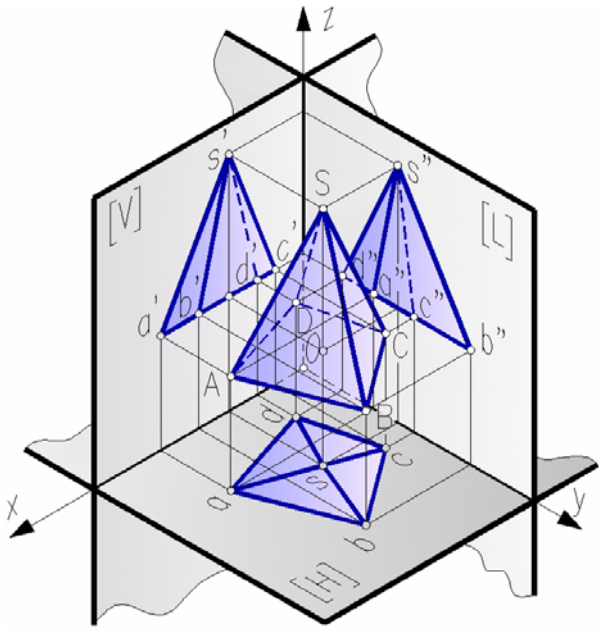


Fig. MIII.U1.9

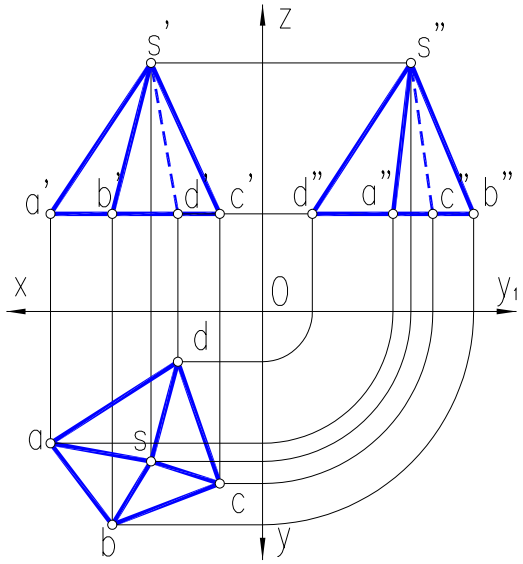


Fig. MIII.U1.10

Întrucât poliedrele se consideră corpuri opace, pentru reprezentarea sugestivă în epură, se utilizează linia groasă continuă pentru muchiile vizibile şi linia întreruptă pentru muchiile acoperite (nevizibile). Pentru *determinarea vizibilității muchiilor* în epură există mai multe criterii. Pentru simplificare, în continuare, se prezintă unul dintre criterii, criteriu care poate fi utilizat cu succes în orice situație în care se cere determinarea vizibilității muchiilor unui poliedru (v. fig. MIII.U1.11).

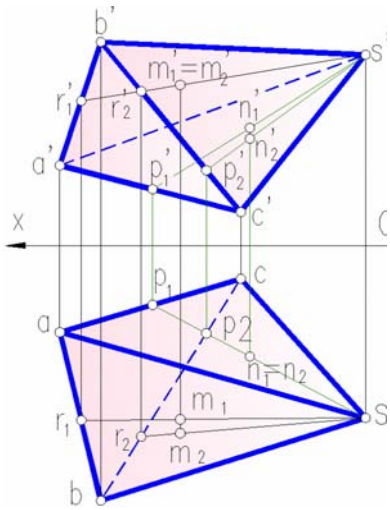


Fig. MIII.U1.11

La determinarea vizibilității în proiecție orizontală se compară cotele diferitelor puncte ale poliedrului, iar pentru determinarea vizibilității în proiecție verticală se compară depărtările unor puncte ale poliedrului.

Spre exemplificare, se analizează vizibilitatea în epură pentru piramida din fig. MIII.U1.11.

Se pleacă de la constatarea că *un punct aparține unei fețe a unui poliedru dacă aparține unei drepte a acestei fețe*.

Astfel, se iau $m_1'=m_2'$ proiecțiile verticale confundate ale punctelor M_1 şi M_2 situate pe fețele *SAB* şi *SBC* de pe dreptele $/SR_1/$ şi $/SR_2/$ aparținând acestor fețe. În proiecție orizontală M_2 având depărtarea mai mare decât M_1 ($zm_2 > z\ m_1$), rezultă că în proiecție verticală fața *SBC* căreia îi aparține M_2 se situează deasupra feței *SAB,* deci muchia $/SA/$ este acoperită în proiecție verticală ($/b'c'/$ se trasează cu linie continuă, iar $/\ s'a'/$ cu linie întreruptă).

Se urmăreşte acelaşi raționament pentru stabilirea vizibilității în proiecție orizontală. Se pot analiza dreptele $/SP_1/$ şi $/SP_2/$ şi cotele punctelor N_1 şi N_2 de pe aceste drepte. Astfel, $zn_1' > zn_2'$ deci în proiecție orizontală este vizibilă fața *SAC* ($/sa/$ se trasează cu linie continuă, iar $/bc/$ cu linie întreruptă).

La stabilirea vizibilității muchiilor în epură, se mai pot avea în vedere şi următoarele criterii:

- conturul aparent este vizibil;
- o muchie sau o față ce conține un punct vizibil (punctul nu aparține conturului aparent) este vizibilă;
- dacă proiecțiile a două muchii ce nu se intersectează în spațiu sunt concurente, atunci una este vizibilă şi una nevizibilă;
- dacă două fețe se intersectează după o muchie ce aparține conturului aparent, una este vizibilă şi cealaltă nevizibilă; dacă muchia nu aparține conturului aparent, atunci ambele fețe sunt vizibile sau ambele sunt nevizibile;
- dacă un vârf ce nu aparține conturului aparent este vizibil (sau nevizibil), atunci toate muchiile ce converg în acel vârf sunt vizibile (respectiv nevizibile).

MIII.U1.5. Secțiuni plane prin poliedre

Prin secționarea unui poliedru cu un plan se obține un poligon. Poligonul de secțiune se poate construi în două moduri:

- prin determinarea vârfurilor acestuia, vîrfuri care rezultă din intersecția muchiilor poliedrului cu planul de secțiune;
- prin determinarea laturilor acestuia, laturi care rezultă din intersectarea fețelor poliedrului cu planul de secțiune.

MIII.U1.5.1. Secțiuni plane în piramidă şi prismă

a. Secțiunea cu un plan de capăt printr-o piramidă dreaptă este prezentată spațial în fig. MIII.U1.12 şi în epură în fig. MIII.U1.13.

Se consideră piramida dreaptă *[SABCDEF]* cu baza un hexagon regulat $[ABCDEF] \subset [H]$ şi planul de capăt *[P]*.

Poligonul de secțiune se determină prin găsirea vârfurilor acestuia ((*M, N, R, T, U* si *V*) la intersecția muchiilor cu planul de secțiune. Pentru găsirea punctelor de intersecție *M* şi *T*

ale muchiilor /*SE*/, respectiv /*SB*/ cu planul *[P]*, a fost necesară construirea proiecției laterale a piramidei. În epura din fig. MIII.U1.13 s-a determinat şi *adevărata mărime a secțiunii* prin rabaterea planului de secțiune *[P]* (odată cu poligonul de secțiune) pe planul orizontal de proiecție.

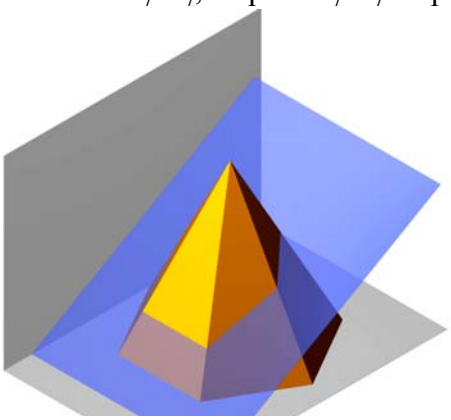


Fig. MIII.U1.12

Pentru o mai bună lizibilitate s-au figurat cu linie continuă proiecțiile trunchiului de piramidă rezultat, iar restul proiecțiilor piramidei (partea care cuprinde vârful) - cu linie întreruptă.

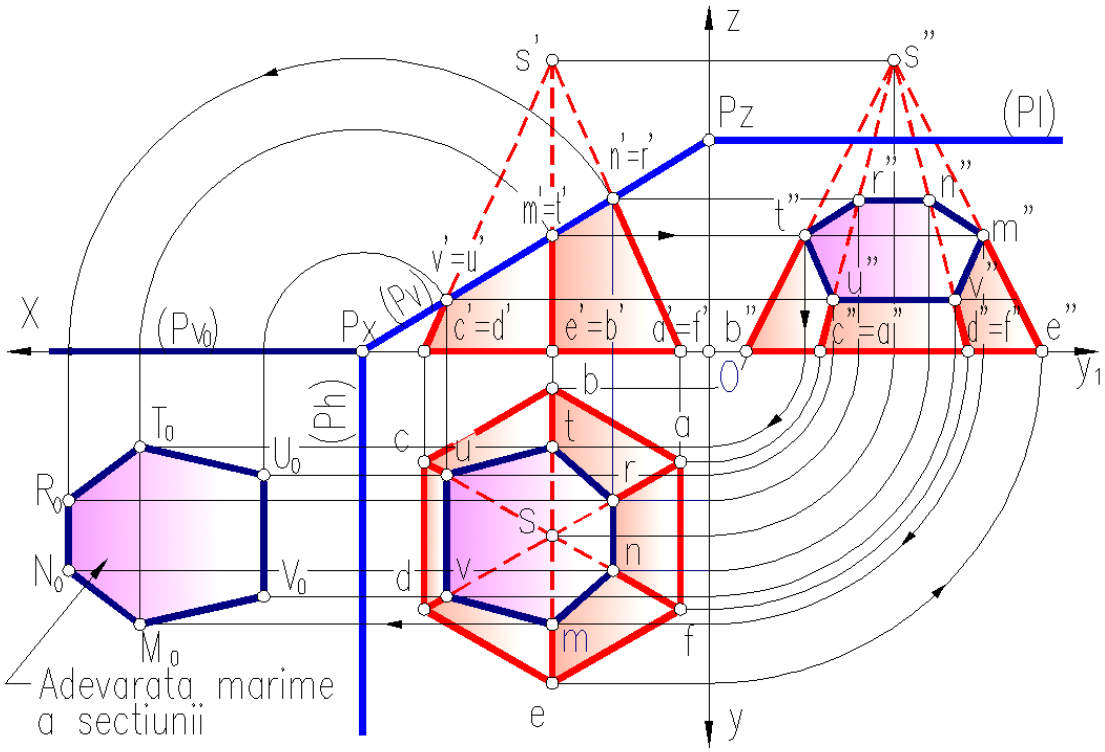


Fig. MIII.U1.13

b. Secțiunea cu un plan oarecare printr-o piramidă înclinată este prezentată în epură în fig. MIII.U1.14.

Se consideră piramida triunghiulară oblică *[SABC]* cu baza *[ABC]* în planul *[H]*. Pentru determinarea vârfurilor poligonului de secțiune, se intersectează muchiile prismei cu planul *[P]*. Conform metodei cunoscute de la intersecția dreaptă-plan, se construiesc prin muchiile prismei plane de capăt şi se determină dreptele de intersecție ale acestora cu planul *[P]*. La intersecția proiecțiilor orizontale ale dreptelor de intersecție cu proiecțiile orizonatale ale muchiilor se găsesc vîrfurile poligonului de secțiune în proiecție orizontală. Pe liniile de ordine trasate din aceste puncte se determină şi proiecția verticală a poligonului de secțiune.

Dacă se doreşte aflarea adevăratei mărimi a acestui poligon se poate face o rabatere a planului *[P]* pe unul din planele de proiecție.

Aflarea mărimii reale a muchiilor se poate face cel mai comod prin metoda rotației.

c. Secțiunea cu un plan de capăt printr-o prismă înclinată este prezentată în epură în fig. MIII.U1.15. În proiecție verticală poligonul de secțiune *[1'2'3'4'5']* se proiectează cu deformare totală după urma verticală a planului. Pe liniile de ordine corespunzătoate, la intersecția cu proiecția orizontală a muchiilor, se obține proiecția orizontală a secțiunii *[12345]*.

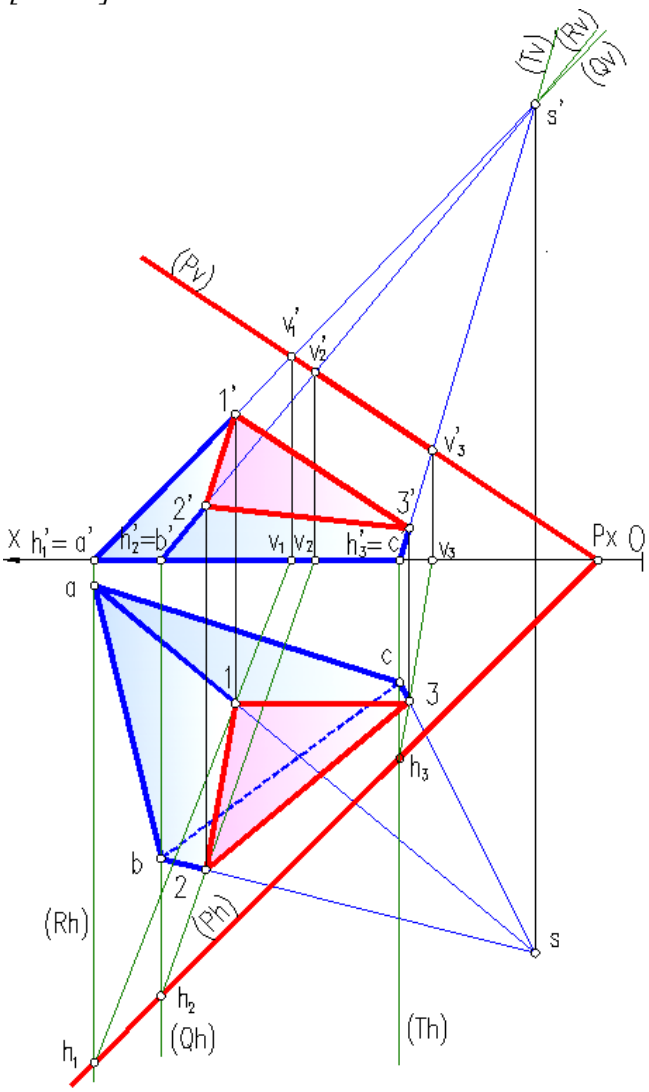


Fig. MIII.U1.14

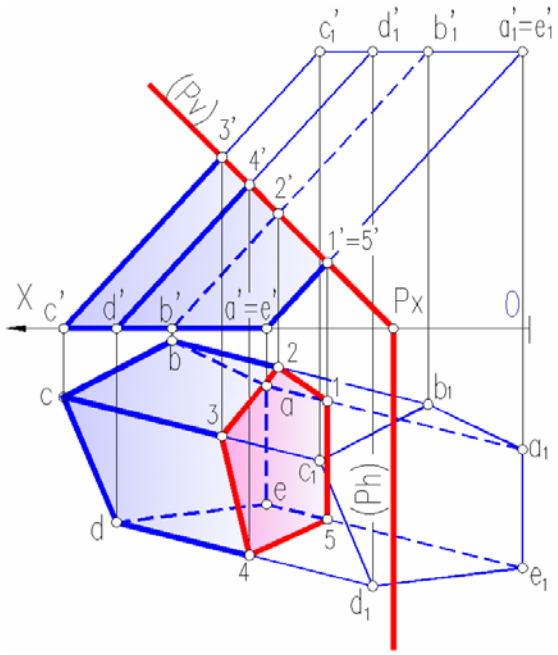


Fig. MIII.U1.15

MIII.U1.6. Desfăşurarea poliedrelor

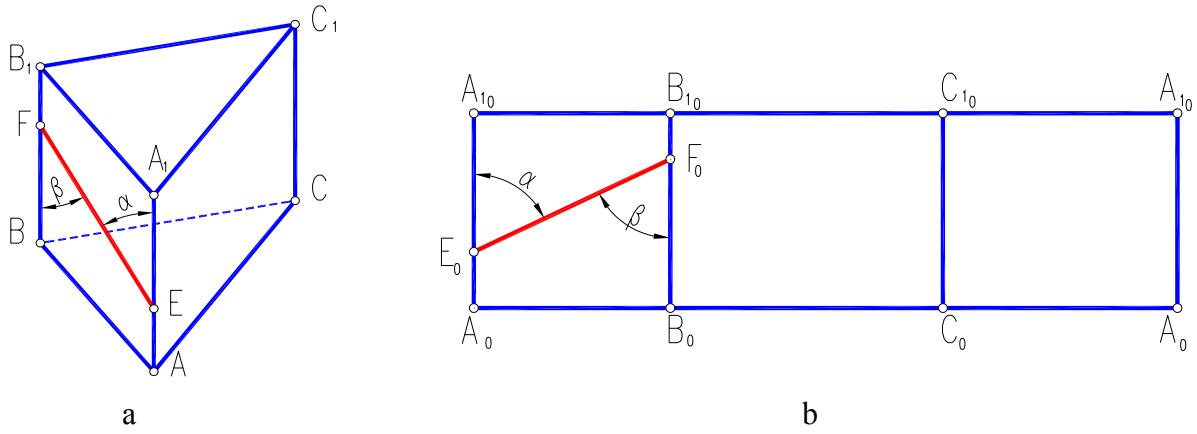
Prin desfăşurarea unui poliedru se înțelege aducerea tuturor fețelor poliedrului pe un singur plan. Figura rezultată în urma acestei operații se numeşte *desfăşurată*.

MIII.U1.6.1. Desfăşurarea prismei

Desfăşurarea prismei presupune construirea în adevărată mărime a patrulaterelor feţelor laterale şi alăturarea lor după succesiunea laturilor poligonului bazei. Pentru realizarea desfăşuratei este necesară cunoaşterea mărimii reale a muchiilor şi a distanţelor dintre ele.

Se consideră prisma dreaptă *[ABCA$_1$B$_1$C$_1$]* (fig. MIII.U1.16, a). Feţele laterale ale acestei prisme sunt dreptunghiuri ale căror laturi sunt muchiile prismei. Muchiile laterale fiind paralele, ele rămân paralele şi pe desfăşurată. În acest caz prisma fiind dreaptă, laturile poligonului de bază sunt perpendiculare pe muchiile laterale ale prismei. În consecinţă poligonul de bază, după desfăşurare, se transformă într-o linie dreaptă.

Dacă pe faţa *[ABB$_1$A$_1$]* se trasează o dreaptă */EF/*, atunci după desfăşurare */EF/* = */E$_0$F$_0$/*, iar unghiurile α şi β se menţin şi în desfăşurare (fig. MIII.U1.16, b).



a b

Fig. MIII.U1.16

În concluzie, se poate spune că:

- o dreaptă de pe suprafaţa unui poliedru se menţine pe desfăşurată şi se numeşte *transformată*;
- unghiurile dintre muchii ca şi unghiurile pe care le fac muchiile cu laturile unei linii poligonale trasate pe o faţă a poliedrului se conservă. Dreptele paralele pe desfăşurată rămân tot paralele;
- o secţiune dreaptă făcută într-o prismă se transformă prin desfăşurarea prismei într-o linie dreaptă.

Faptul că o secţiune dreaptă printr-o prismă are transformata prin desfăşurare o linie dreaptă, conduce la utilizarea acestei linii ca axă de referinţă la construirea desfăşuratei, axă pe care se vor măsura distanţele dintre muchii.

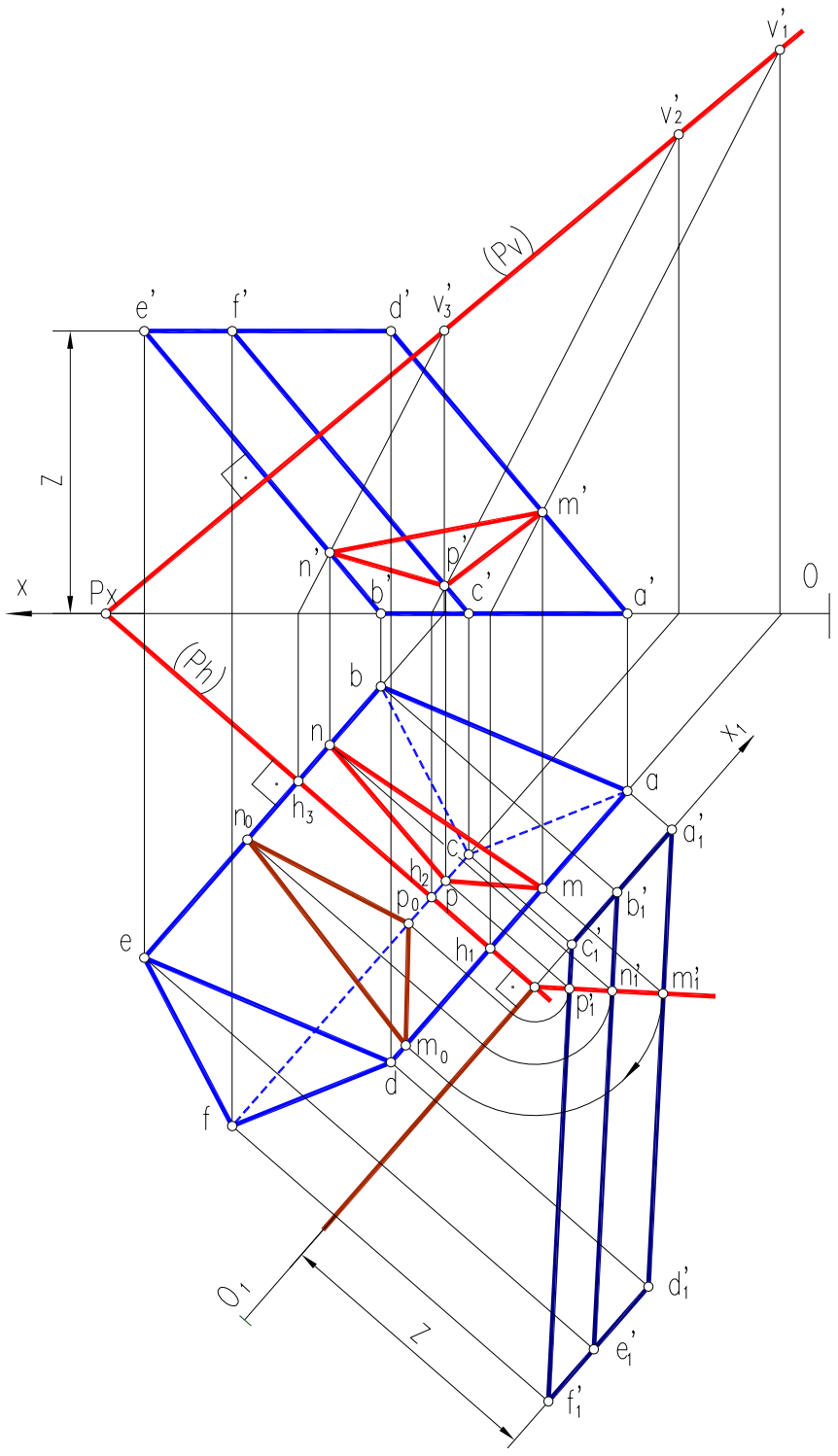


Fig. MIII.U1.17

În fig. MIII.U1.17 se prezintă obținerea *secțiunii drepte* (necesară obținerii transformatei pentru desfăşurare) printr-o prismă oblică cu baza situată în planul *[H]*. Urmele planului de secțiune se aleg *perpendiculare* pe muchii.

Pentru obținerea proiecțiilor figurii de intersecție dintre prismă şi planul *[P]* s-au intersectat muchiile prismei cu acest plan, luând prin muchiile prismei ca plane ajutătoare trei

plane verticale. S-au obținut proiecțiile *[mnp]* şi *[m'n'p']* ale figurii de intersecție. Pentru aflarea adevăratei mărimi ale muchiilor s-a apelat la o schimbare de plan vertical de proiecție (s-a luat $(O_1x_1) \parallel |ad|$). În această nouă poziție muchiile devin frontale, deci apar în adevărată mărime în noua proiecție verticală ($|AD| = |a_1'd_1'|$). Noua proiecție verticală a secțiunii $[m_1'n_1'p_1']$ apare cu deformare totală, situație în care planul secțiunii este, după această transformare, un plan de capăt ($(Ph) \perp (O_1x_1)$), iar urma sa verticală rămâne perpendiculară pe muchii. Adevărata mărime a figurii de intersecție $[m_0n_0p_0]$ s-a obținut prin rabaterea acestui plan din noul sistem de proiecție în jurul urmei orizontale.

Conform constatărilor de la începutul paragrafului, pentru realizarea *desfăşuratei* prismei (fig. MIII.U1.18), laturile poligonului de secțiune, în acest caz ale triunghiului $[m_0n_0p_0]$, se transpun pe o linie dreaptă $M_0N_0P_0M_0$, respectiv transformata acestuia.

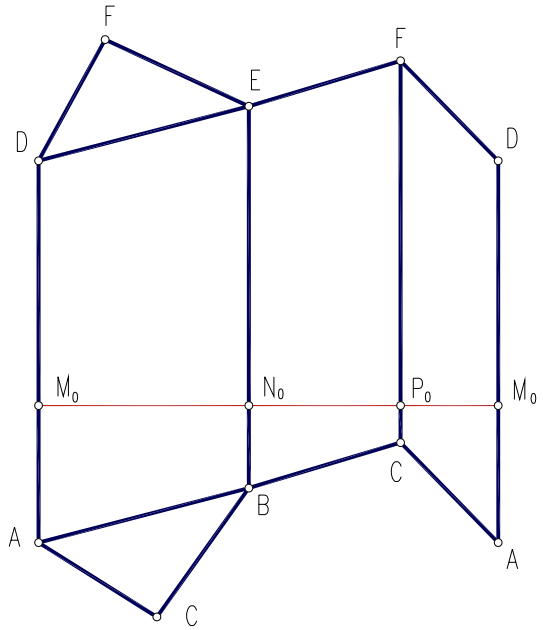


Fig. MIII.U1.18

Pe perpendicularele duse pe această dreaptă în punctele M_0, N_0, P_0, M_0 se transpun, pornind din aceste puncte, de o parte şi de alta a liniei, lungimile reale ale muchiilor măsurate pe noua proiecție verticală din epura din fig. MIII.U1.17. Spre exemplu $|M_0A_0| = |m_1'a_1'|$ şi $|M_0D_0| = |m_1'd_1'|$. În final se adaugă şi triunghiurile celor două baze.

Etapele desfăşurării unei prisme oblice sunt:

- reprezentarea în epură a prismei;
- secționarea prismei cu un plan perpendicular pe muchiile laterale şi determinarea poligonului de secțiune;
- aflarea adevăratei mărimi a muchiilor laterale şi a distanțelor dintre acestea (laturile poligonului secțiunii normale pe muchii);
- trasarea dreptei ce reprezintă transformata, prin desfăşurare, a secțiunii normale pe muchiile laterale, dreaptă pe care se marchează laturile secțiunii în mărime reală;
- trasarea muchiilor laterale, în punctele astfel determinate, perpendiculare pe transformata secțiunii normale şi marcarea mărimilor reale ale muchiilor celor două trunchiuri de prismă dreaptă;
- trasarea bazelor prismei.

MIII.U1.6.2. Desfăşurarea piramidei

Desfăşurarea piramidei presupune construirea în adevărată mărime a bazei şi a muchiilor laterale, muchii care definesc triunghiurile feţelor laterale. Adevărata mărime a bazei se obţine cel mai comod prin metoda rabaterii, iar lungimea muchiilor prin metoda rotaţiei.

În fig. MIII.U1.19 se prezintă *epura* unei piramide oarecare cu baza un triunghi *ABC* situată într-un plan de capăt. Adevărata mărime a bazei s-a obţinut prin rabaterea planului de capăt al bazei pe planul orizontal de proiecţie. Lungimea reală a muchiilor s-a obţinut prin rotaţia muchilor în jurul unui ax de capăt ce trece prin *S* şi transformarea lor în frontale. În fig. MIII.U1.20 se prezintă *epura desfăşurării* acestei piramide.

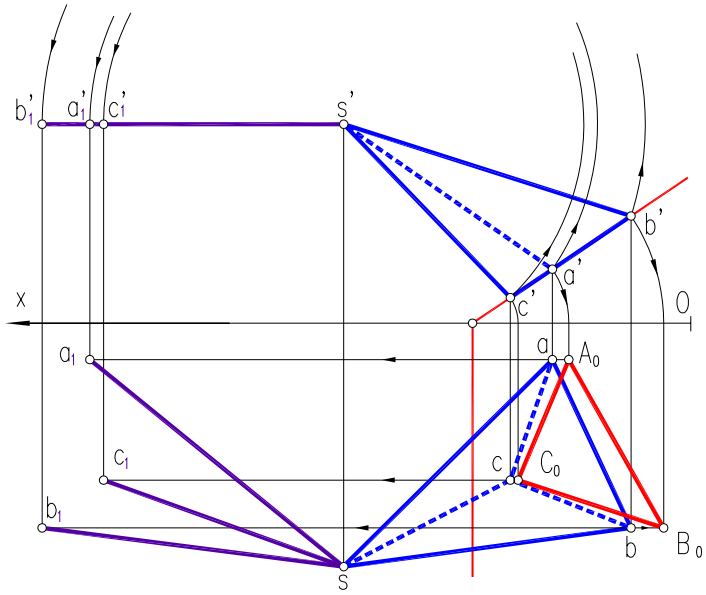


Fig. MIII.U1.19

Dintr-un punct oarecare *S* corespunzînd vârfului piramidei se trasează dreapta $|SA| = |sa_1|$. Cu centrul în *A* se construieşte arcul de cerc cu raza $|AB| = |A_0B_0|$. Cu centrul în *S* se construieşte arcul de cerc de rază $|SB| = |sb_1|$. La intersecţia celor două arce rezultă punctul *B*. Celelalte trei feţe se construiesc în mod asemănător. Se remarcă, în acest caz, că din desfăşurată rezultă şi adevărata mărime a bazei *[ABC]*, prin obţinera mărimii reale a laturilor $|AB|$, $|BC|$, $|AC|$, chiar fără rabaterea planului de capăt.

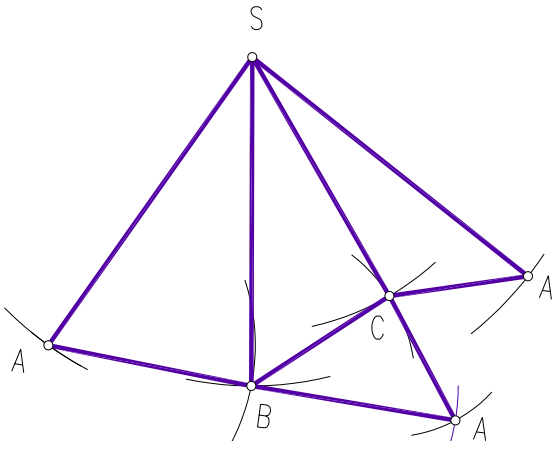


Fig. MIII.U1.20

În Fig. MIII.U1.21 se prezintă epura desfăşuratei unui trunchi de piramidă dreaptă secţionată cu un plan de capăt *[P]*. Adevărata mărime a secţiunii *[1234]* cu planul *[P]* prin

piramidă s-a determinat prin rabatere. *[$1_0 2_0 3_0 4_0$]* reprezintă adevărata mărime a secțiunii. Lungimea muchiilor s-a determinat prin rotație, respectiv, acestea au fost transformate în frontale prin rotirea lor în jurul unui ax de capăt ce trece prin S (nefigurat în epură).

Muchiile fiind egale (este o piramidă dreaptă), după rotație proiecțiile lor se suprapun în epură. Pe *|s'b_1'|* (sau *|s'c_1'|* sau *|s'a_1'|* sau *|s'd_1'|*), care reprezintă lungimea reală a celor patru muchii *(|| s'a_1'|| ≡ || s'b_1'|| ≡ || s'c_1'|| ≡ || s'd_1'|| ≡|| SA|| ≡ || SB|| ≡ || SC|| ≡|| SD||*, s-au determinat şi proiecțiile rotite (*3$_1$', 2$_1$' 4$_1$', 1$_1$'*,) ale punctelor de intersecție cu planul *[P]*, rezultând astfel şi lungimile reale ale muchiilor trunchiului de piramidă.

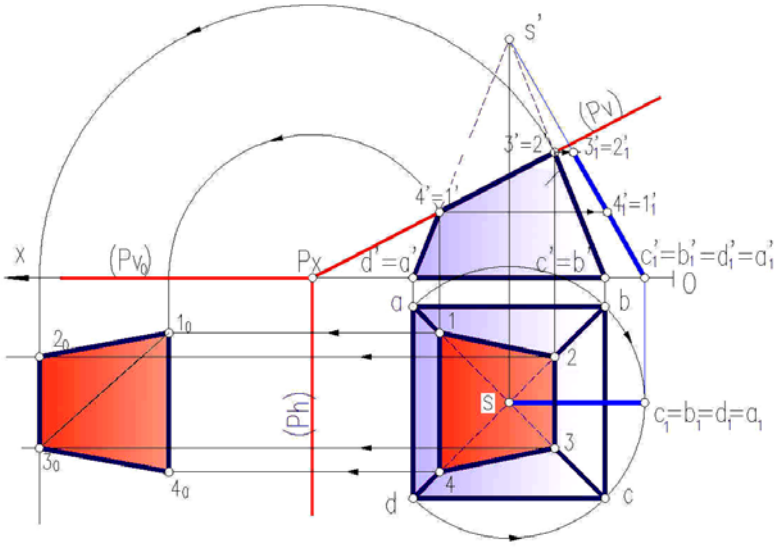


Fig. MIII.U1.21

|| s'1_1'|| ≡ || S1_0||
|| s'2_1'|| ≡ || S2_0||
|| s'$3c_1$'|| ≡ || S3_0||
|| s'$4d_1$'|| ≡ || S4_0||

Desfăşurarea (fig. MIII.U1.22) s-a făcut în *stea,* de o parte şi de alta a pătratului bazei, luând în compas mărimile reale ale acestor muchii (din proiecție verticală).

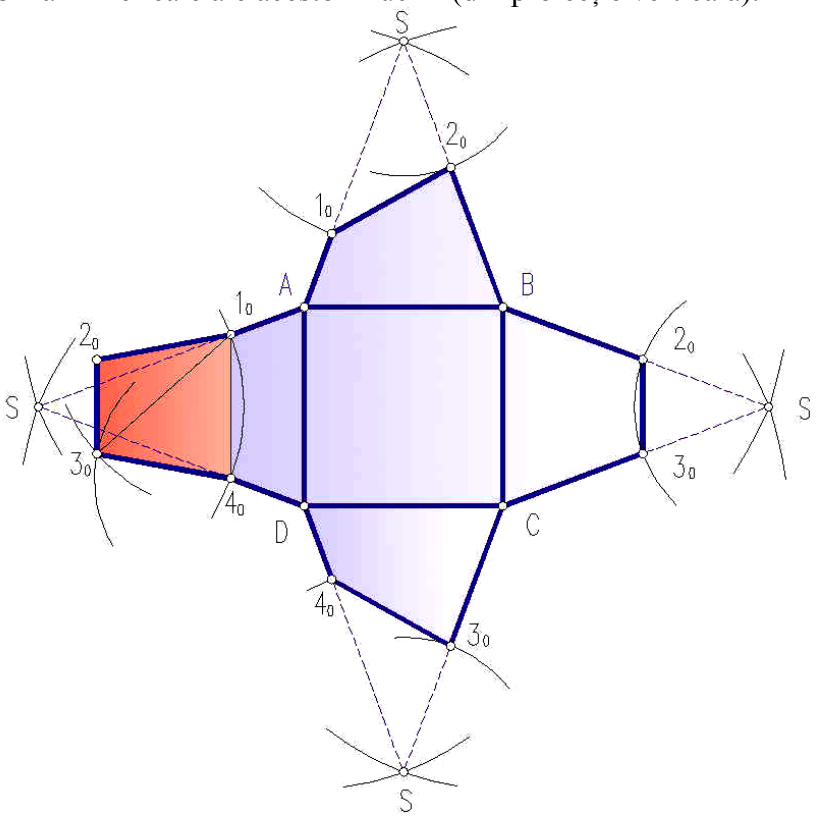


Fig. MIII.U1.22

Consideraţi aceeaşi piramidă dreaptă ca în fig. MIII.U1.21. Pătratul bazei are latura 40mm, iar înălţimea pirmidei este de 70mm. Alegeţi o altă poziţie a planului de capăt. Determinaţi adevarata mărime a secţiunii şi desfăşuraţi trunchiul de piramidă rezultat. Desfăşurarea să fie facută prin alăturarea feţelor.

Exemple

1. Să se construiască epura prismei drepte *[ABCDA$_1$B$_1$C$_1$D$_1$]* cu baza un dreptunghi *[ABCD]* conţinut într-un plan de capăt *[P]*. Se cunosc: *A(30,10,z$_A$); B(x$_B$, 10, z$_B$); D(30, y$_D$, z$_D$); //AB//=30* mm, *//AD//=40* mm, înălţimea prismei *//AA$_1$//=45* mm; *P$_x$(80,0,0)* şi *P$_z$(0,0,70)*.

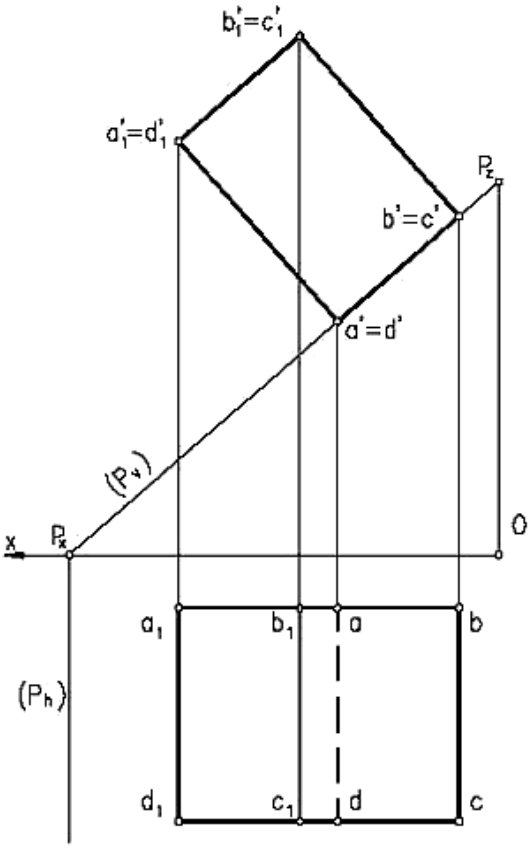


Fig. MIII.U1.23

Indicaţii: Se construieşte planul de capăt *[P]* ştiind că *(P$_h$)⊥(Ox)* (fig. MIII.U1.23). Întrucât orice figură aparţinând unui plan de capăt are proiecţia verticală pe *(P$_v$)*, *[a'b'c'd']⊂[P$_v$]*; */AB/* este o frontală a planului deoarece *y$_A$=y$_B$=10 mm* şi */AD/* este o dreaptă de capăt deoarece $x_A=x_D$. Prin urmare, *//AB//=//a'b'//=30* mm şi *//AD//=//ad//=40* mm. Prisma fiind dreaptă, muchiile sale sunt frontale perpendiculare pe planul *[P]*. Deci */AA$_1$/ ≡/a$_1$a$_1$'/*.

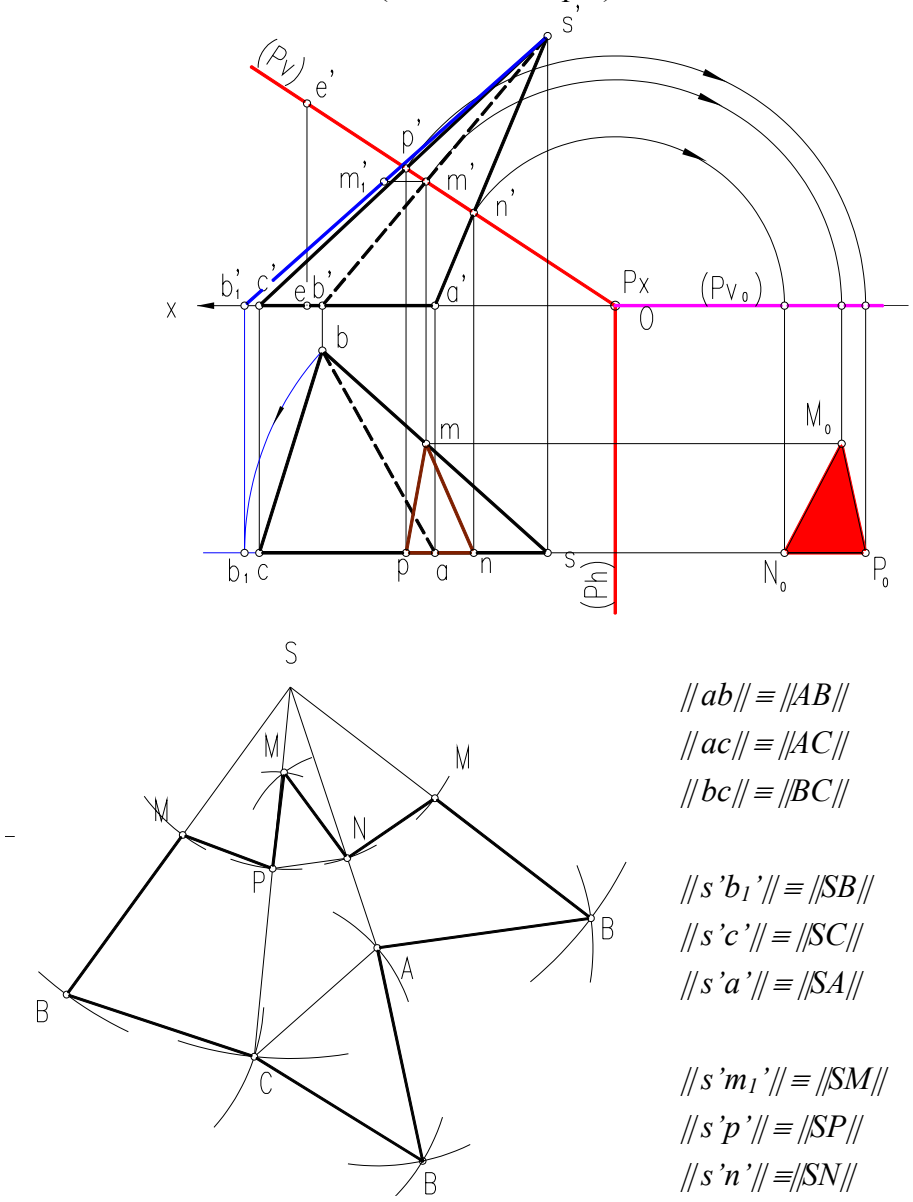
2. Se consideră piramida *[SABC]* definită de punctele: *S(15,55,60), A(40,55,0), B(65,10,0), C(80,55,0)* şi planul de capăt *[P]* definit de punctele *Px(0,0,0)* şi *E(68,0,45)*.

Se cere:

- să se construiască proiecţiile piramidei;
- să se afle adevărata mărime a secţiunii dintre planul *[P]* şi piramidă;
- să se desfăşoare trunchiul de piramidă rezultat.

Rezolvare în fig. MIII.U1.24.

Observaţii: muchiile */SA/* şi */SC/* fiind frontale, adevărata lor mărime se regăseşte pe proiecţiile lor verticale */s'a'/* şi */s'c'/*. Adevărata mărime a muchiei */SB/* şi, implicit a lui */SM/*, se obţine prin rotaţia acesteia în jurul lui *S* şi transformarea ei în frontală (în acest exemplu).



$//ab// \equiv //AB//$
$//ac// \equiv //AC//$
$//bc// \equiv //BC//$

$//s'b_1'// \equiv //SB//$
$//s'c'// \equiv //SC//$
$//s'a'// \equiv //SA//$

$//s'm_1'// \equiv //SM//$
$//s'p'// \equiv //SP//$
$//s'n'// \equiv //SN//$

Fig. MIII.U1.24

1. Se consideră prisma *[ABCA₁B₁C₁]* definită de punctele *A(42,0,30), B(25,0,5), C(5,0,35)* şi *A1(85,45,60)*. Să se construiască desfăşurata prismei.

2. Se se construiască epura unei prisme drepte *[ABCA₁B₁C₁]* cu baza un triunghi echilateral *[ABC]* situat în planul *[P]* definit de punctele $P_x(100,0,0)$, $P_y(0,80,0)$, $A(60,y_A,15)$. Segmentul *//AB//=35 mm* şi aparţine unei orizontale a planului *[P]*. Înălţimea prismei este *//AA₁//=50 mm*. Să se construiască apoi desfăşurata.

Indicaţie: Punctul *A* se plasează pe o orizontală a planului. Punctul *B* se determină construind mai întâi proiecţia lui orizontală. Se rabate planul *[P]* împreună cu orizontala şi punctele *A* şi *B*. În planul rabătut se construieşte triunghiul. Se ridică din rabatere punctul *C*. Se construiesc proiecţiile muchiilor prismei perpendicularte pe urmele planului. Pentru a putea măsura în adevărată mărime muchiile prismei se cunsideră un punct oarecare *M* pe una din muchii, se roteşte acest segment până devine dreaptă orizontală (sau frontală), se măsoară lungimea reală, apoi se revine din rotaţie. Celelalte muchii au aceeaşi lungime.

3. Se consideră tetraedrul regulat *[ABCD]* cu lungimea laturii de *35 mm.* Să se desfăşoare.

4. Se consideră piramida dreaptă cu baza un hexagon regulat înscris într-un cerc de rază *R=30 mm*, înălţimea *//SΩ//= 70 mm, Ω(50,40,0)*. Se secţionează piramida cu planul de capăt *[P]* definit de punctele *Px(110,0,0)* şi *R(20,0,60)*. Să se afle adevărata mărime a secţiunii şi să se desfăşoare trunchiul de piramidă rezultat.

Să ne reamintim...

- Un *poliedru* este un corp geometric mărginit de feţe plane
- *Poliedrele regulate* sunt poliedrele care au următoarele proprietăţi:

- toate feţele sunt poligoane regulate egale;
- vârfurile sunt unghiuri solide regulate egale;
- sunt inscriptibile în sferă, cât şi circumscribile sferei.

- Există *cinci* poliedre regulate: *tetraedrul regulat*, *cubul (hexaedrul)*, *octaedrul regulat*, *dodecaedrul regulat* şi *icosaedrul regulat*.

- Poliedrele care nu respectă proprietăţile poliedrelor regulate se numesc *poliedre neregulate*.
- *Prisma* este poliedrul ale cărui muchii, rezultate din intersecţia feţelor laterale, sunt parelele între ele, iar bazele sunt egale între ele şi paralele
- *Piramida* este poliedrul ale cărui muchii laterale sunt concurente într-un punct numit *vârf*, iar baza este un poligon.
- *Poligonul de secţiune* al unei prisme sau piramide cu un plan oarecare sau particular se determină prin găsirea vârfurilor acestuia la intersecţia muchiilor cu planul de secţiune. Se aplică intersecţia dreaptă-plan.
- Adevărata mărime a poligonului de secţiune se obţine, cel mai comod, prin rabaterea planului de secţiune.
- Prin desfăşurarea unui poliedru se înţelege aducerea tuturor feţelor poliedrului pe un singur plan.

- Desfăşurarea prismei presupune construirea în adevărată mărime a patrulaterelor feţelor laterale şi alăturarea lor după succesiunea laturilor poligonului bazei. Pentru realizarea desfăşuratei este necesară cunoaşterea mărimii reale a muchiilor şi a distanţelor dintre ele. Distanţa dintre muchiile prismei se obţine, de regulă, printr-o secţiune dreaptă şi prin aflarea mărimii reale a laturilor poligonului de secţiune, mărime care determină distanţa dintre muchii pentru transformata prin desfăşurare. Adevărata mărime a muchiilor se poate obţine prin utilizarea uneia din metodele geometriei descriptive
- Desfăşurarea piramidei presupune construirea în adevărată mărime a triunghiurilor feţelor laterale şi alăturarea lor. Adevărata mărime a muchiilor se poate obţine, de regulă, prin metoda rotaţiei.

MII.U1.7. Rezumat

În cadrul acestei unităţi de învăţare s-au definit şi s-au clasificat poliedrele, s-a explicat modul de reprezentare a acestora şi vizibilitatea muchiilor în epură..

Dintre poliedrele frecvent întâlnite în forma obiectelor tehnice s-au detaliat prisma şi piramida. Atât pentru prismă cât şi pentru piramidă s-a explicat modul de obţinere a secţiunilor plane şi a desfăşuratelor acestora.

Explicaţiile au fost însoţite de desene spaţiale izometrice, de epurele corespunzătoare şi de exemple lămuritoare.

MII.U1.8. Test de evaluare a cunoştinţelor

1. Care sunt poliedrele regulate şi ce proprietăţi au?

2. Ce sunt poliedrele neregulate?

3. Cum se determină vizibilitatea muchiilor unui poliedru în epură?

4. Cum se determină poligonul de secţiune la secţionarea unui poliedru cu un plan proiectant?

5. Cum se determină poligonul de secţiune la secţionarea unui poliedru cu un plan oarecare?

6. Cum se determină adevărata mărime a secţiunii printr-un poliedru?

7. Ce reprezintă transformata la desfăşurarea unei prisme?

8. Cum se poate afla adevărata mărime a muchiilor unui poliedru?

9. Enumăraţi etapele desfăşurării unei prisme oarecare.

10. Enumăraţi etapele desfăşurării unei piramide oarecare.

Unitatea de învățare MIII.U2. Corpuri cilindro-conice

Cuprins

MIII.U2.1. Introducere 128
MIII.U2.2. Competențe 128
MIII.U2.3. Reprezentarea cilindrului şi conului 129
MIII.U2.4.Secțiuni plane în con şi cilindru. 130
MIII.U1.4.1. Secțiuni plane în conul circular drept 130
MIII.U1.4.2. Secțiuni plane în cilindrul circular drept 131
MIII.U2.5. Desfăşurarea suprafețelor cilindro-conice 132
MII.U5.3.1. Desfăşurarea conului. 132
MII.U5.3.2. Desfăşurarea trunchiului de con circular drept 134
MII.U5.3.3. Desfăşurarea cilindrului 134
MIII.U2.6. Rezumat 140
MIII.U2.7. Test de evaluare a cunoştințelor 140

MIII.U2.1. Introducere

În cadrul acestei unități de învățare se definesc şi se analizează cilindrul şi conul, se explică modul de reprezentare şi modul de determinare a secțiunilor plane şi a desfăşuratelor acestora.

MIII.U2.2. Competențe

După parcurgerea materialului acestei unități de învățare studenții vor fi capabili:

- să definească suprafețele cilindrice şi conice, cilindrul şi conul şi să le reprezinte în epură;
- să realizeze secțiuni plane prin cilindru, în speță prin cilindrul circular drept, şi să afle adevărata mărime a acestor secțiuni;
- să realizeze secțiuni plane prin con, în speță prin conul circular drept, şi să afle adevărata mărime a acestor secțiuni;
- să desfăşoare cilindrul şi şi conul sau trunchiurile de cilindru şi con rezultate în urma secționarii acestora cu plane oarecare sau particulare;

Durata medie de parcurgere a acestei unități de învățare este de 3 ore.

MIII.U2.3. Reprezentarea cilindrului şi conului

Suprafața cilindrică este generată de o dreaptă, numită *generatoare,* care se deplasează paralel cu o direcție dată şi se sprijină pe o curbă fixă numită *curbă directoare* fig. MIII.U2.1).

Cilindrul este corpul mărginit de o suprafață cilindrică şi două plane paralele.

Cilindrul circular drept este generat de o dreaptă care se roteşte în jurul unei axe paralele cu acesta (fig. MIII.U2.2).

Suprafața conică este generată de o dreaptă mobilă, numită generatoare, care trece printr-un punct fix numit *vârf* şi se sprijină pe o curbă fixă numită *curbă directoare* (fig. MIII.U2.2).

Conul este corpul mărginit de o suprafață conică şi un plan.

Conul circular drept este generat de o dreaptă ce se roteşte în jurul unei axe cu care este concurentă (fig. MIII.U2.4).

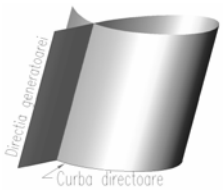


Fig. MIII.U2.1

Fig. MIII.U2.2

Fig. MIII.U2.3

Fig. MIII.U2.4

Conul (fig. MIII.U2.5) şi cilindrul (fig. MIII.U2.6) se reprezintă în epură prin conturul aparent al acestora pe planele de proiecție. În cazul conului circular, conturul aparent pe un plan de proiecție este alcătuit din urmele planelor ce conțin vârful conului şi sunt tangente la cercul de bază şi perpendiculare pe planul de proiecție, cât şi din porțiunea vizibilă a cercului de bază, cuprinsă între punctele de tangență. Urmele planelor menționate coincid cu proiecțiile generatoarelor de contur aparent. În fig. MIII.U2.5 şi fig. MIII.U2.6 sunt prezentate şi proiecțiile punctelor M_1 şi M_2 situate pe aceste suprafețe.

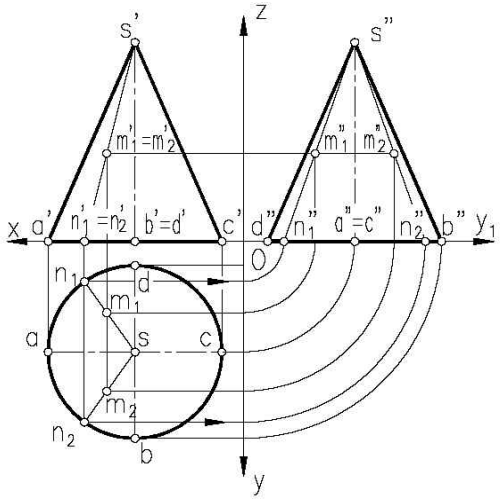


Fig. MIII.U2.5

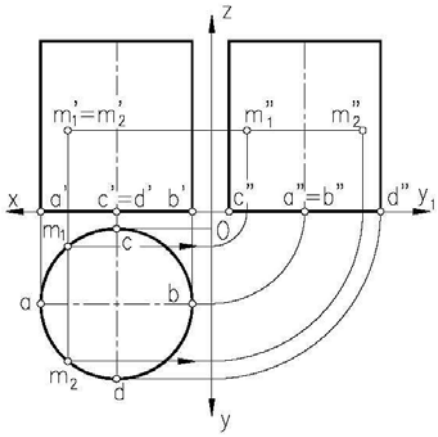


fig. MIII.U2.6

MIII.U2.4. Secțiuni plane în con şi cilindru

În cadrul acestui paragraf se prezintă secțiuni plane prin conul circular drept şi prin cilindrul circular drept utilizând doar plane particulare (proiectante).

MIII.U2.4.1. Secțiuni plane în conul circular drept

În funcție de poziția planului de secționare forma secțiunii în conul circular drept poate fi: cerc (fig. MIII.U2.7, a); elipsă (fig. MIII.U2.7, b); triunghi isoscel (fig. MIII.U2.7, c); hiperbolă (fig. MIII.U2.7, d); parabolă (fig. MIII.U2.7, e).

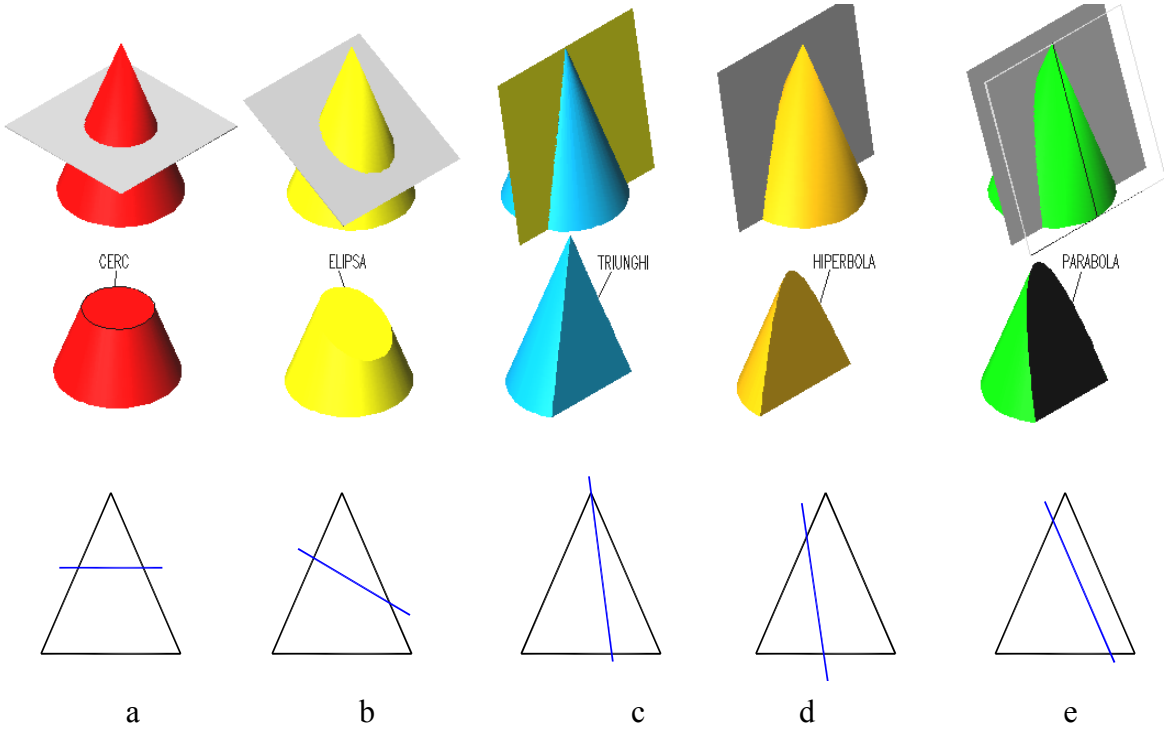


Fig. MIII.U2.7

a) Secțiunea eliptică în con (fig. MIII.U2.8)**.** Se consideră un con circular drept cu baza conținută în planul orizontal de proiecție *[H]*, care se secționează cu un plan de capăt *[P]*. Conform teoremei lui *Dandelin*, dacă planul dus prin vârful conului, paralel cu planul dat, nu taie conul, secțiunea rezultată este o *elipsă*.

Proiecția verticală a secțiunii este segmentul $/a_1'b_1'/$ situat pe urma *(Pv)* a planului de secțiune. Proiecția $/a_1b_1/$ a acestui segment pe planul orizontal de proiecție este axa mare a elipsei de secțiune. Axa mică a elipsei de secțiune are proiecția orizontală perpendiculară pe proiecția orizontală a axei mari la mijlocul acestuia O_1. Pentru a afla axa mică a elipsei de secțiune se utilizează un plan de nivel *[N]* care trece prin punctul $O_1(o_1,o_1')$ şi secționează conul după după cercul de rază mn, iar planul *[P]* după dreapta (G_1H_1). La intersecția proiecției orizontale a acestei drepte cu cercul de secțiune rezultă punctele G_1 şi H_1 care determină axa mică a elipsei.

b) Secțiunea parabolică în con (fig. MIII.U2.9)**.** Se consideră un con circular drept cu baza conținută în planul orizontal de proiecție *[H]*, care se secționează cu un plan de capăt *[P]*. Conform teoremei lui *Dandelin*, dacă planul dus prin vârful conului, paralel cu planul *[P]* de secțiune, este tangent generatoarei conului, secțiunea rezultată este o *parabolă*.

Proiecția verticală a secțiunii este confundată cu urma *(Pv)* a planului de secțiune. Proiecția orizontală a parabolei se determină prin unirea punctelor situate la intersecția generatoarelor conului cu planul *[P]*. Punctele *C* şi *J* sunt punctele de intersecție ale planului cu conturul bazei. Punctul *M* este punctul de intersecție cu generatoarea de contur aparent.

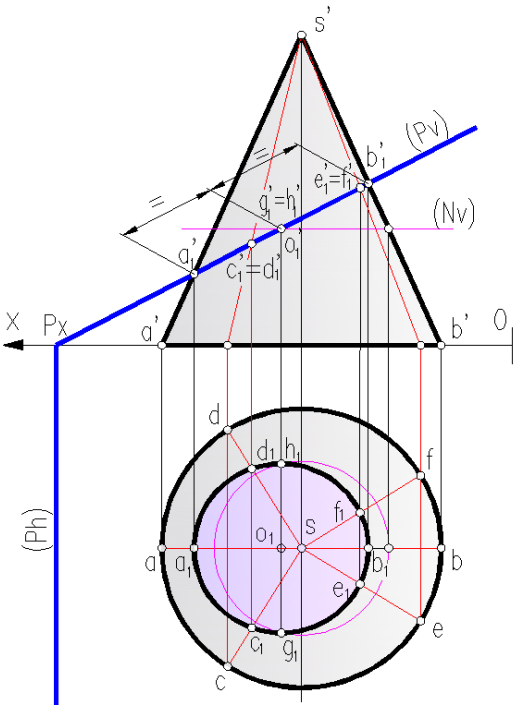


Fig. MIII.U2.8

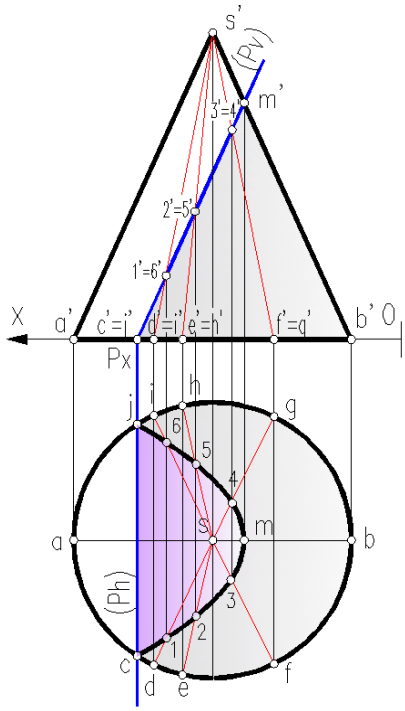


Fig. MIII.U2.9

c) Secțiunea hiperbolică în con. Când planul de secțiune ocupă o poziție oarecare, diferită de cele analizate anterior, secțiunea este o *hiperbolă,* care se determină prin unirea punctelor situate la intersecția generatoarelor conului cu planul *[P]*.

MIII.U2.4.2. Secțiuni plane în cilindrul circular drept

În funcție de poziția planului de secționare forma secțiunii în cilindrul circular drept poate fi cerc (fig. MIII.U2.10), dreptunghi (fig. MIII.U2.11), elipsă (fig. MIII.U2.12).

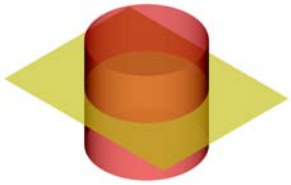


Fig. MIII.U2.10

Fig. MIII.U2.11

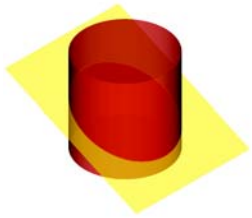


Fig. MIII.U2.12

a) Secțiunea eliptică în cilindru (fig. MIII.U2.13)**.** Se consideră un cilindru circular drept care este secționat de planul de capăt *[P]*. Elipsa de secțiune se proiectează în planul vertical de proiecție deformată total, deci confundată cu urma verticală a planului, iar în plan orizontal se suprapune peste cercul de bază. Pentru construirea proiecției laterale precum şi la aflarea adevăratei mărimi s-au luat mai multe generatoare ale cilindruluii care s-au intersectat cu planul dat. Adevărata mărime a elipsei s-a obținut prin rabatrea planului în jurul urmei *(Ph)*.

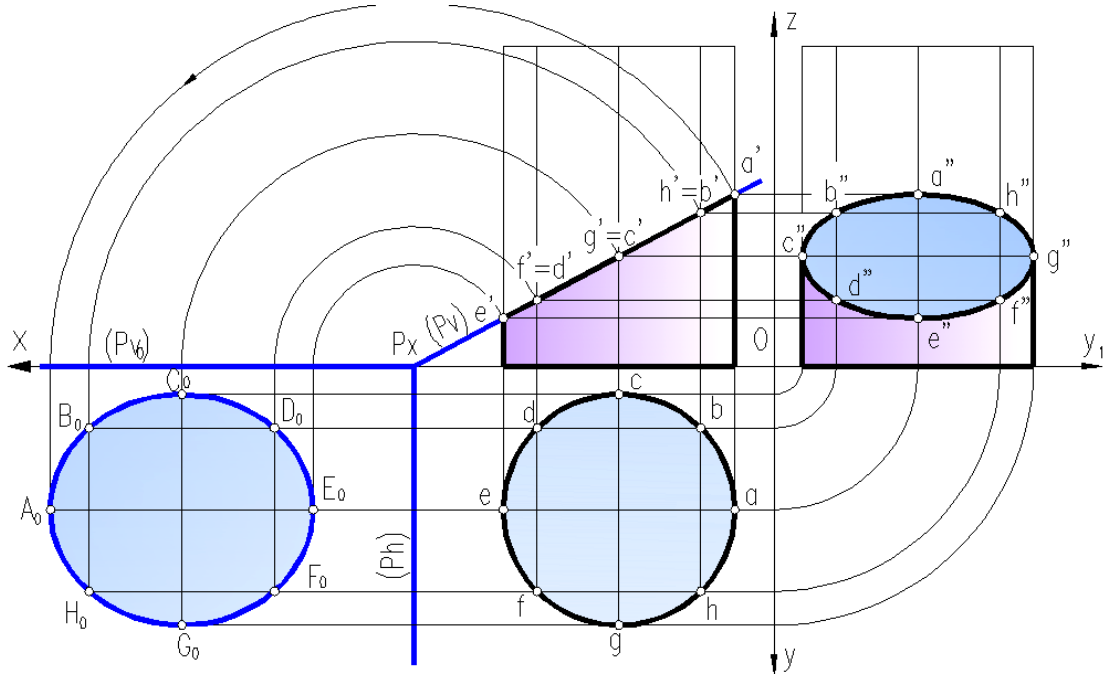


Fig. MIII.U2.13

MIII.U2.5. Desfăşurarea suprafețelor cilindro-conice

Desfăşurarea unui con sau a unui cilindru este limita desfăşurării unei piramide înscrise în con sau a unei prisme înscrise în cilindru şi la care numărul de fețe creşte în mod nedefinit. Ca urmare, unghiul dintre două muchii laterale ale piramidei înscrise sau distanța dintre două muchii laterale ale prismei tind la zero.

MIII.U2.5.1. Desfăşurarea conului

Fie un con circular oblic cu vârful în *S* şi baza situată în planul orizontal de proiecție (fig. MIII.U2.14). Pentru desfăşurarea conului se consideră piramida cu baza un octogon regulat înscris în cercul de bază al conului. Adevărata mărime a muchiilor laterale ale acestei piramide s-a determinat prin rotirea acestora şi transformarea lor în frontale. S-a desfăşurat piramida prin construirea triunghiurilor fațelor laterale (fig. MIII.U2.15). Punctele de inflexiune *M* şi *N* ale transformatei bazei corespund punctelor în care planele tangente la bază, ce conțin vârful conului, sunt perpendiculare pe planul bazei.

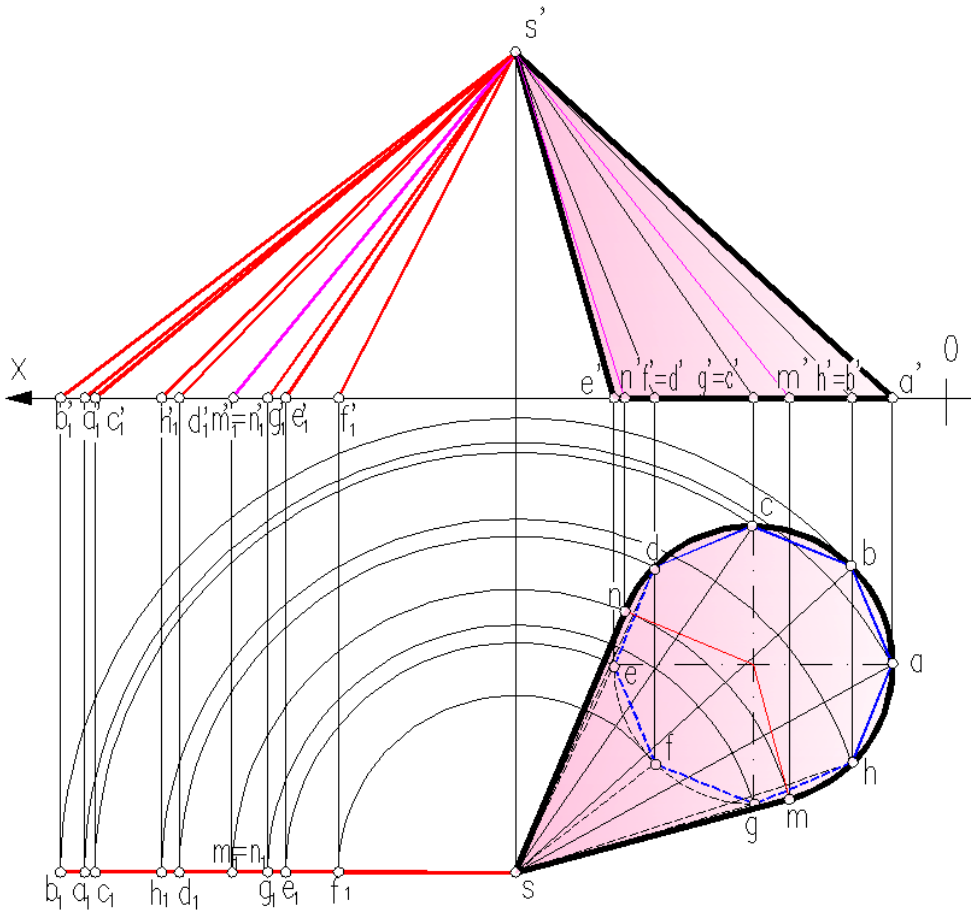


Fig. MIII.U2.14

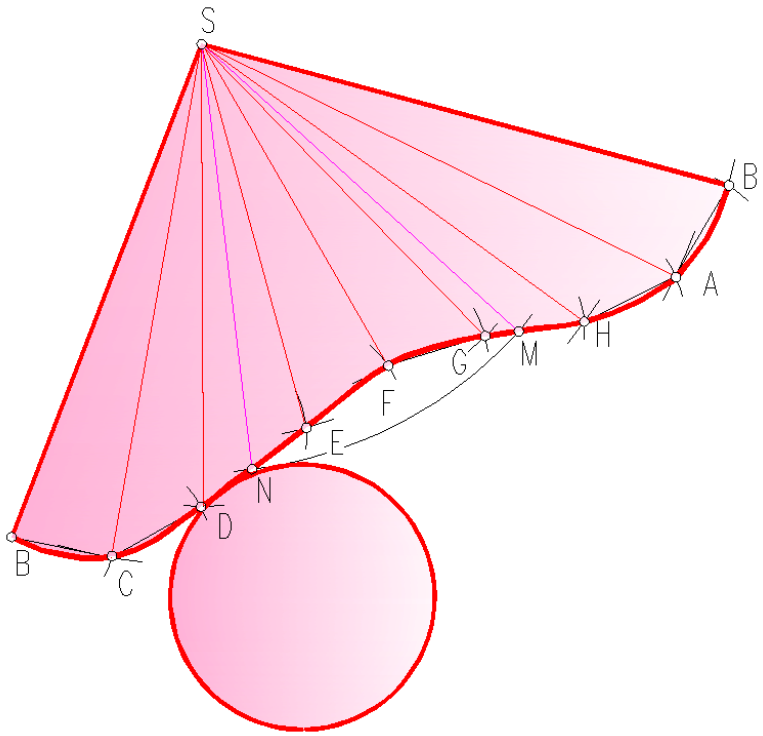


Fig. MIII.U2.15

MIII.U2.5.2. Desfăşurarea trunchiului de con circular drept

Fie un con circular oblic cu vârful în *S* şi baza situată în planul orizontal de proiecţie (fig. MIII.U2.16). Se secţionează conul cu un plan de capăt *[P]*. Pentru a desfăşura trunchiul de con rezultat, se desfăşoară mai întâi conul din care acesta face parte. Desfăşurata conului circular drept este un sector circular de rază egală cu generatoarea având unghiul la centru $\alpha = 360°R/G$ (*R* – raza cercului de bază, *G* – generatoarea). Se consideră mai multe generatoare ale conului care intersectate cu planul *[P]* dau punctele prin care se construieşte elipsa de secţiune. Pentru trasarea pe desfăşurată a transformatei elipsei de secţiune se află adevărata mărime a generatoarelor prin transformarea lor în drepte de front (în acest exemplu). Rotaţia lor se face în jurul unei axe verticale ce trece prin *S* şi se aduc suprapuse peste generatoarea *|S1|,* după care, prin arce de cerc cu centrul în *s'*, sunt transpuse pe transformatele generatoarelor corespunzătoare. Se unesc punctele astfel obţinute şim se obţine transformata elipsei de secţiune. Pentru determinarea punctelor de inflexiune ale transformatei se construieşte perpendiculara din *S* pe planul *[P]* şi urma orizontală notată cu *R* a acestei perpendiculare (conform teoremei *Olivier*). Urmele orizontale ale planelor tangente la con, sunt tangentele la cercul de bază duse prin *r*. Punctele de inflexiune căutate sunt M_1 şi M_2.

MIII.U2.5.3. Desfăşurarea cilindrului

Se consideră un cilindru circular oblic cu baza situată în planul orizontal de proiecţie având generatoarele drepte frontale (fig. MIII.U2.17).

Pentru desfăşurarea cilindrului se împarte cercul de bază în mai multe părţi şi se trasează generatoarele corespunzătoare acestor puncte. Ca şi la desfăşurarea prismei, la desfăşurarea cilindrului este necesară cunoaşterea adevăratei mărimi a generatoarelor precum şi distanţelor dintre acestea Generatoarele fiind frontale, adevărata lor mărime se regăseşte în proiecţie verticală. Pentru determinarea distanţei dintre generatoare se secţionează cilindrul cu planul *[P]* perpendicular pe generatoare (în acest caz plan de capăt). Prin rabaterea acestui plan pe planul vertical de proiecţie se obţine în adevărată mărime elipsa de secţiune. Transformata prin desfăşurare a acestei elipse este un segment de dreptă egal cu lungimea elipsei (fig. MIII.U2.18). La construcţia acestei transformate arcele de elipsă se aproximează prin coardele respective ($|A_{10}B_{10}| \cong |\!|A_{10}B_{10}|\!|$). Generatoarele se construiesc perpendiculare pe transformată. Pe aceste perpendiculare se măsoară lungimea generatoarelor luând-o din proiecţie verticală de o parte si de alta a planului de secţiune. Se unesc punctele rezultate.

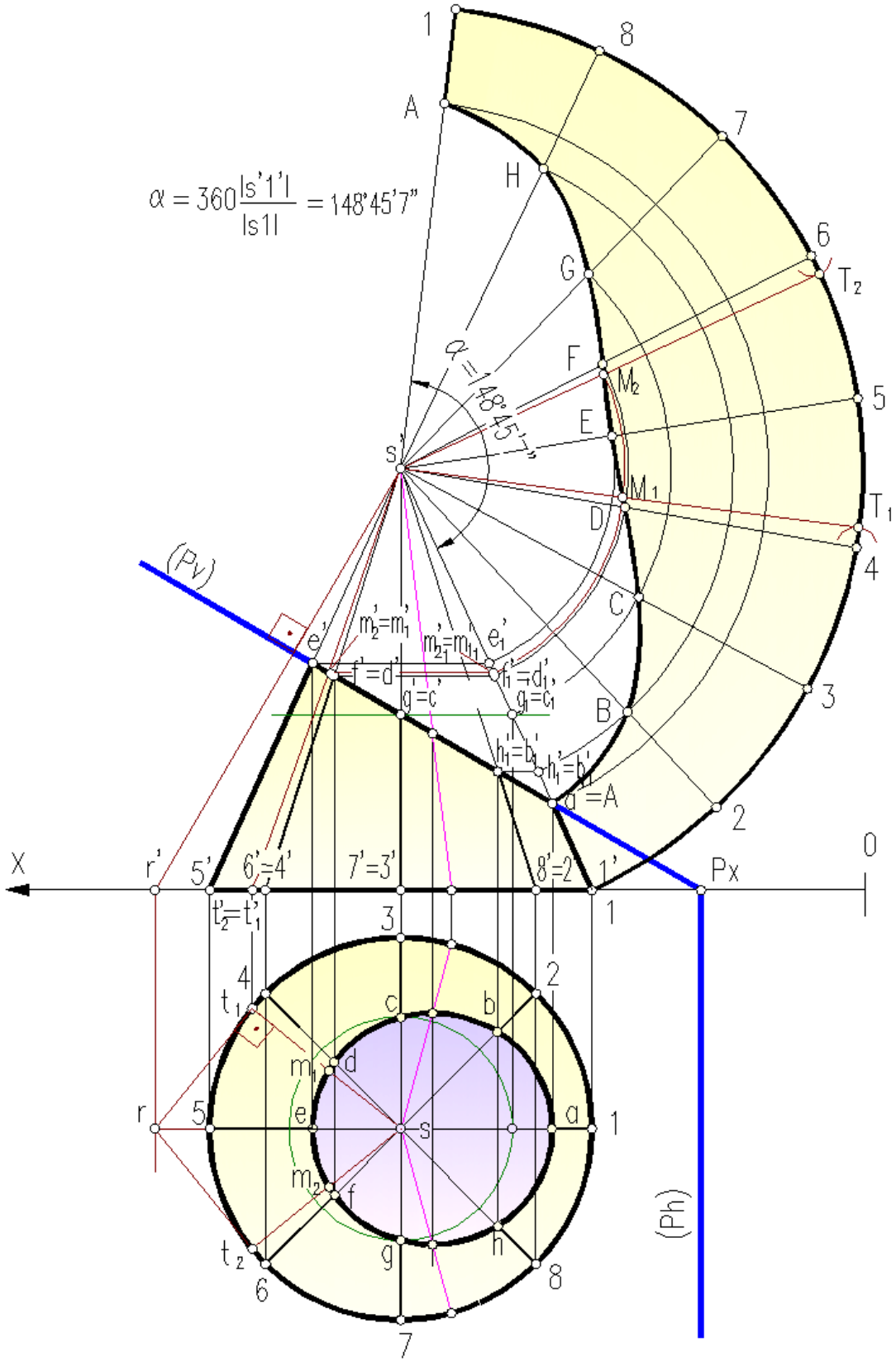


Fig. MIII.U2.16

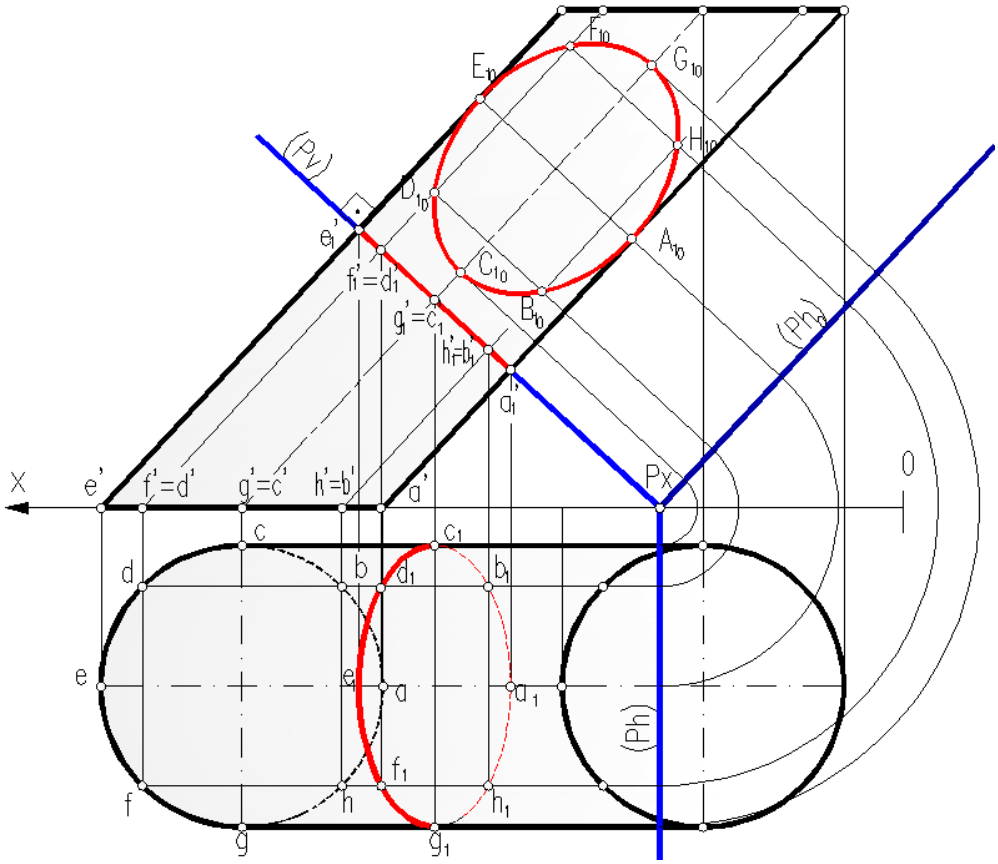


Fig. MIII.U2.17

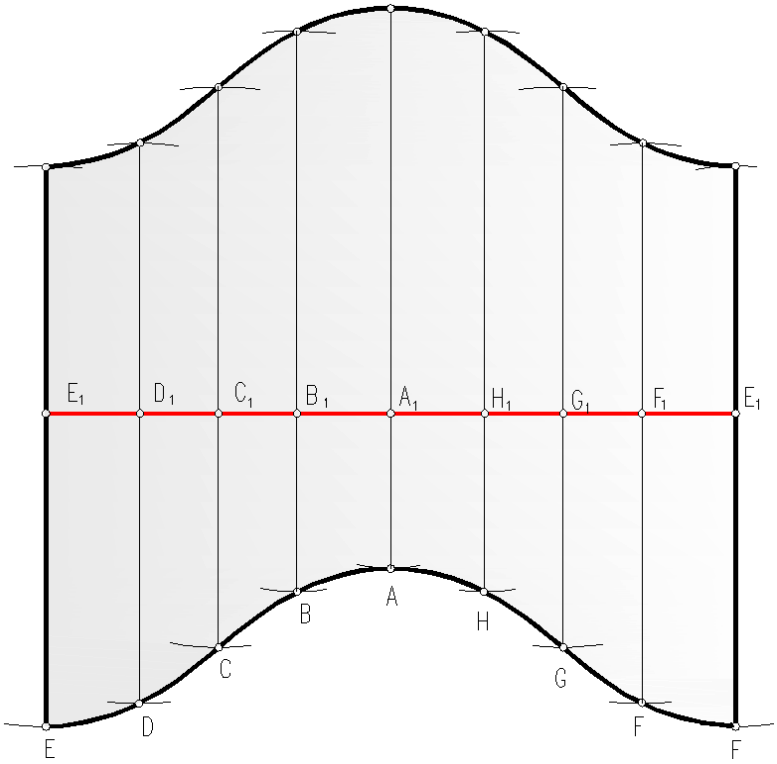


Fig. MIII.U2.18

Exemple

1. Se consideră conul circular drept, având baza cu centrul $\Omega(\omega,\omega')$ situată în planul vertical $[P](P_h,P_v)$ şi vârful $S(s,s')$. Să se construiască proiecţiile elipsei de secţiune a conului cu planul de front $[F](F_h)$ şi desfăşurata trunchiului de con situat între planele $[P]$ şi $[F]$ (fig. MIII.U2.19).

Indicaţii: Planul $[F]$ intersectează generatoarele $/SA/,/SB/,...,/SH/$ în punctele $1,2,...8$. Pentru a construi desfăşurata trunchiului de con se determină adevăratele lungimi ale segmentelor $/S1/,/S2/,...,/S8/$ efectuând rotaţii ale acestora în jurul unei axe de capăt ce conţine vârful S.

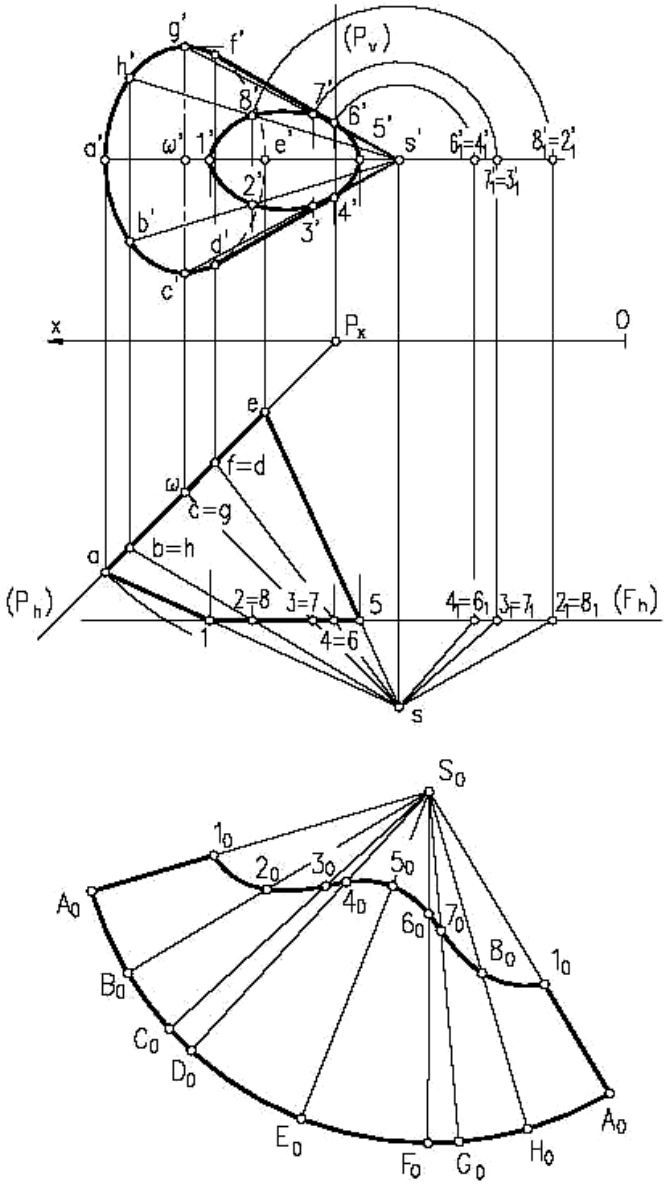


Fig. MIII.U2.19

2. Se consideră conul circular oblic, având baza cu centrul *Ω(ω,ω')* situată în planul orizontal de proiecţie şi vârful *S(s,s')*. Să se construiască proiecţiile elipsei de secţiune a conului cu planul de capăt *[P](P$_h$,P$_v$)* şi să se afle adevărata mărime a acesteia (fig. MIII.U2.20).
Indicaţii: Generatoarele */SA/, /SB/,...,/SH/* intersectează planul *[P]* în punctele *1,2,...,8*. Pentru aflarea adevăratei mărimi a secţiunii plane, se rabate planul *[P]*, împreună cu punctele *1,2,...,8*, în jurul urmei orizontale *(P$_h$)* şi se obţin punctele *1$_0$, 2$_0$,...,8$_0$* care definesc curba de secţiune, în adevărată mărime.

3. Se consideră cilindrul circular drept, având baza cu centrul *Ω(ω,ω')* situată în planul vertical de proiecţie şi înălţimea */AA$_1$/*. Să se construiască proiecţiile curbei de secţiune a cilindrului cu planul oarecare *[P](P$_h$,P$_v$)* şi desfăşuurata corpului rezultat după secţionare (fig. MIII.U2.21).
Indicaţii: Se utilizează planele de nivel *[N$_1$]*, *[N$_2$]*,..., *[N$_5$]* care intersectează planul *[P]* după orizontalele *(D$_1$),(D$_2$),...(D$_5$)*, iar cilindrul după generatoare. La intersecţia acestora, se obţin punctele *1,2,...9* care definesc curba de secţiune.

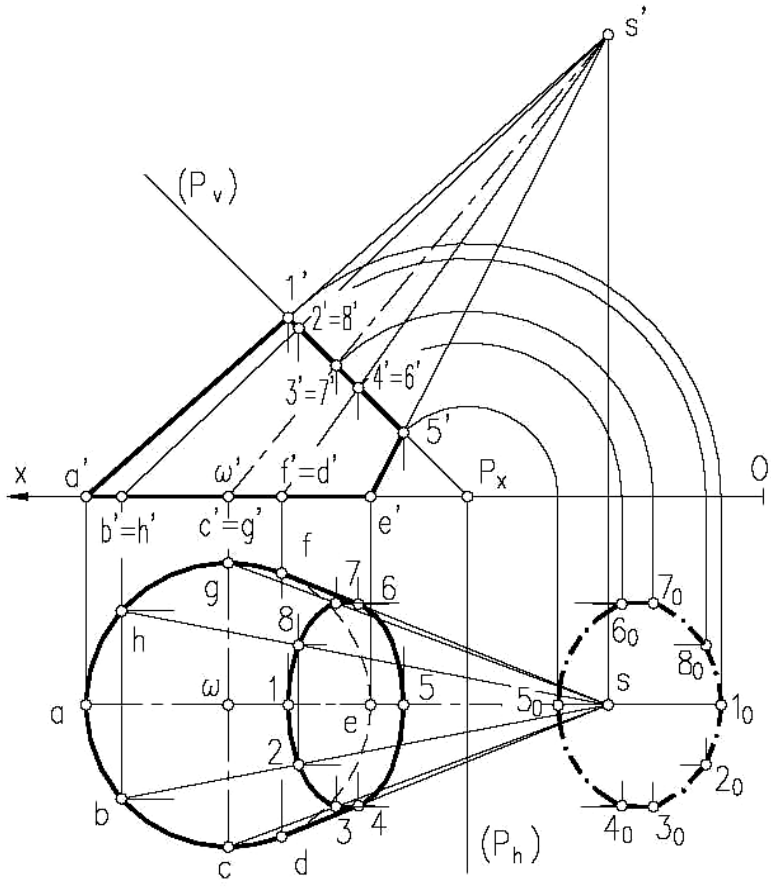


Fig. MIII.U2.20

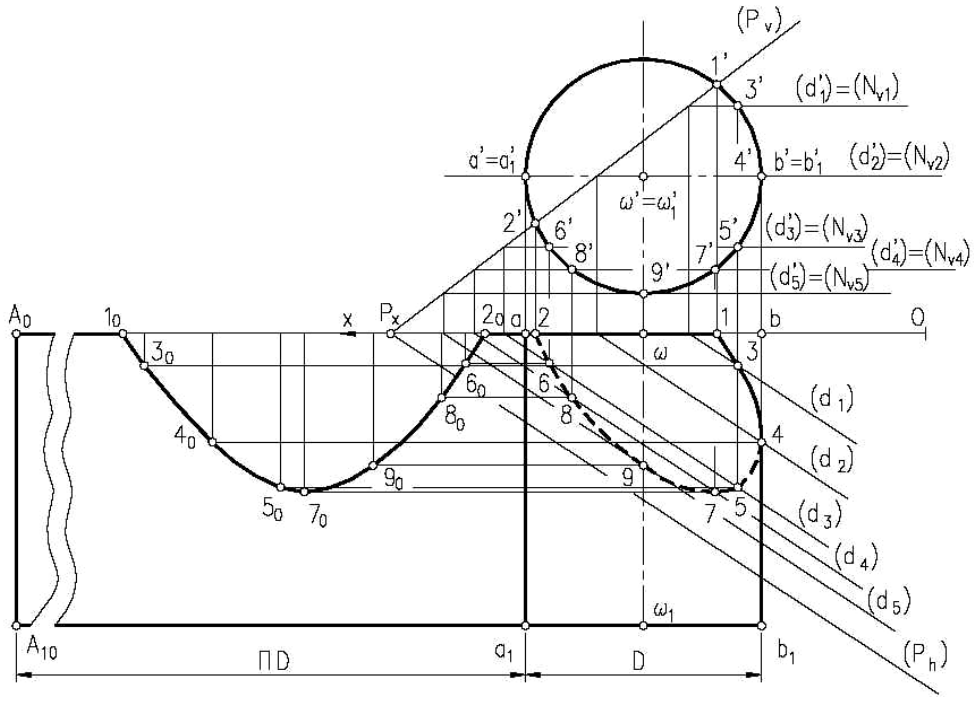


Fig. MIII.U2.21

1. Se consideră conul circular drept cu baza în planul orizontal de proiecție cu cercul de rază $R = 25\ mm$, înălțimea $//S\Omega// = 60\ mm$, $\Omega(50,40,0)$. Să se desfăşoare acest con.

2. Să se construiască proiecțiile secțiunii drepte prin cilindrul circular oblic definit prin centrele bazelor $O_1(110,60,0)$, $O_2(35,30,65)$ şi raza lor $r=20\ mm$.

3. Se consideră conul circular drept cu baza în planul orizontal de proiecție şi vârful în S defint prin: centrul cercului de bază în $\Omega(35,30,0)$, raza cercului de bază $R = 25\ mm$, înălțimea $S(35,30,55)$,. Se secționează conul cu planul de capăt $[P]$ definit de $P_x(80,0,0)$ şi $P_z(0,0,40)$. Să se afle adevărata mărime a secțiunii şi să se desfăşoare trunchiul de con rezultat.

4. Să se construiască desfăşurata trunchiului de cilindru circular drept obținut prin secționarea unui cilindru circular drept cu baza în planul orizontal de proiecție cu centrul în $O_1(60,40,0)$ şi raza $R = 20\ mm$, cu planul de capăt definit de $P_x(30,0,0)$ şi $R(90,0,40)$. Să se determine şi adevărata mărime a secțiunii.

Să ne reamintim...

- Cilindrul este corpul mărginit de o suprafață cilindrică şi două plane paralele. Suprafața cilindrică este generată de o dreaptă, numită generatoare, care se deplasează paralel cu o direcție dată şi se sprijină pe o curbă fixă numită curbă directoare.
- Cilindrul circular drept este generat de o dreaptă care se roteşte în jurul unei

axe paralele cu acesta.

- Conul este corpul mărginit de o suprafață conică şi un plan. Suprafața conică este generată de o dreaptă mobilă, numită generatoare, care trece printr-un punct fix numit vârf şi se sprijină pe o curbă fixă numită curbă directoare.
- Conul circular drept este generat de o dreaptă ce se roteşte în jurul unei axe cu care este concurentă.
- Figura de secțiune a unui con cu un plan *[P]* poate fi cerc, elipsă, triunghi, parabolă şi hiperbolă.
- Figura de secțiune a unui cilindru circular drept cu un plan *[P]* poate fi cerc, dreptunghi, elipsă.
- Pentru desfăşurarea cilindrului se împarte cercul de bază în mai multe părți şi se trasează generatoarele corespunzătoare acestor puncte. Se procedează apoi ca şi la desfăşurarea prismei.
- Pentru desfăşurarea conului se consideră cât mai multe generatoare ale acestuia şi se procedează la fel ca la desfăşurarea piramidei.
- La determinarea secțiunii plane prin cilindru sau prin con se consideră mai multe generatoare ale acestor corpuri, care se intersectează cu planul dat. Adevărata mărime a secțiunii se află, de regulă, prin rabaterea planului.

MIII.U2.6. Rezumat

În cadrul acestei unități de învățare s-au definit cilindrul şi conul, s-a explicat modul de reprezentare a acestora în epură..

S-au detaliat cilindrul circular drept şi şi conul circular drept explicându-se modalitățile de obținere a secțiunilor plane şi a desfăşuratelor acestora.

Explicațiile au fost însoțite de desene spațiale izometrice, de epurele corespunzătoare şi de exemple lămuritoare.

MIII.U2.7. Test de evaluare a cunoştințelor

1. Ce este o suprafață cilindrică?

2. Ce este o suprafață conică?

3. Care sunt formele secțiunilor printr-un con circular drept în funcție de poziția planului de secțiune?

4. Care sunt etapele desfăşurării unui con?

5. Cum se procedează la obținerea desfăşuratei unui cilindru circular oblic?

6. Cum se procedează la secționarea unui cilindru circular drept cu un plan?

7. Cum se procedează la secționarea unui con circular drept cu un plan?

Unitatea de învățare MIII.U3. Intersecția corpurilor geometrice

Cuprins

MIII.U3.1. Introducere 141
MIII.U3.2. Competențe..... 141
MIII.U3.3. Intersecția corpurilor geometrice. 142
MIII.U3.3.1. Intersecția poliedrelor..... 143
MIII.U3.3.2. Intersecția corpurilor cilindro-conice 146
MIII.U3.4. Rezumat..... 153
MIII.U3.5. Test de evaluare a cunoştinţelor 153
Temă de control 154

MIII.U3.1. Introducere

În cadrul acestei unități de învățare se definesc tipurile de intersecții dintre corpuri geometirce care pot fi rezolvate cu ajutorul geometriei descriptive. Din marea varietate de corpuri ce se pot intersecta, se analizează cazurile particulare ale intersecției poliedrelor şi ale corpurilor cilindro-conice obişnuite, se explică modul de reprezentare şi modul de determinare a liniilor de intersecție în epură.
La sfârşitul unității se formulează şi tema de control a modulului III.

MIII.U3.2. Competențe

După parcurgerea materialului acestei unități de învățare studenții vor fi capabili:

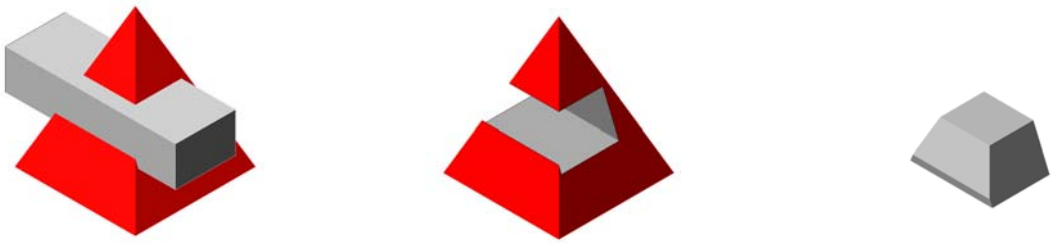
- să definească tipurile de intersecții dintre corpuri geometirce;
- să realizeze intersecții de prisme;
- să realizeze intersecția de prismă-piramidă;
- să realizeze intersecții de cilindri circulari drepți;
- să realizeze intersecții dintre conuri circulare drepte şi cilindri circulari drepți.
- să utilizeze *metoda diagramelor desfăşuratelor convenționale* pentru a stabili liniile de intersecție atât ca formă cît şi ca vizibilitate în epură.

Durata medie de parcurgere a acestei unități de învățare este de 5 ore.

MIII.U3.3. Intersecția corpurilor geometrice

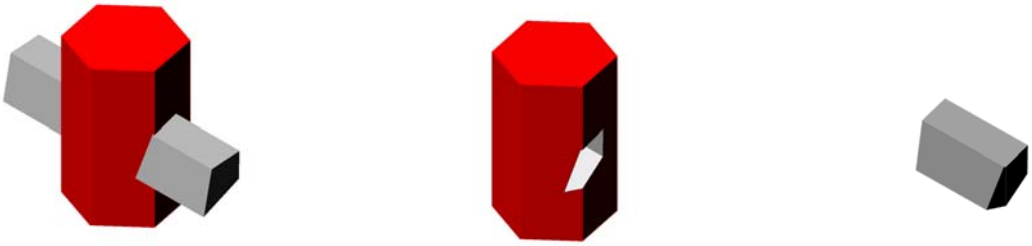
Din intersecția a două corpuri geometrice rezultă una sau două linii poligonale sau curbe închise, de regulă spațiale, linia de intersecție fiind mulțimea punctelor comune suprafețelor celor două corpuri.

Intersecția a două corpuri geometrice alcătuită dintr-o singură linie se numește *rupere* sau intersecție parțială (fig. MIII.U3.1, a şi b), iar intersecția formată din două linii se numește *pătrundere* sau intersecție totală (fig. MIII.U3.2, a şi b).



a b c

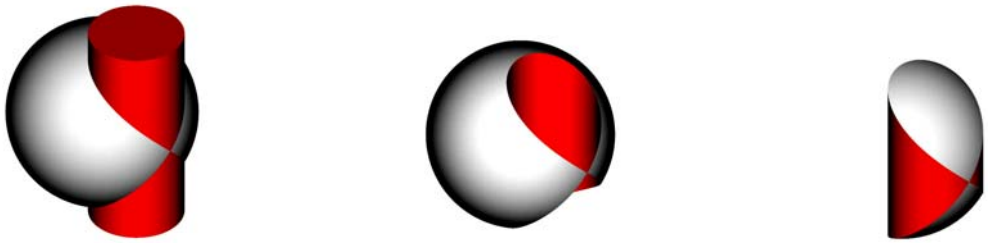
Fig. MIII.U3.1



a b c

Fig. MIII.U3.2

La intersecția prin rupere linia de intersecție este întotdeauna spațială. La intersecția prin pătrundere liniile de intersecție pot fi ambele plane, ambele spațiale sau una plană şi una spațială; dacă liniile de intersecție au un punct comun se obține o *intersecție tangențială* (fig. MIII.U3.3, a şi b). Partea comună celor două corpuri care se intersectează poartă denumirea de *solid comun* (fig. MIII.U3.1, c; fig. MIII.U3.2, c şi fig. MIII.U3.3, c).



a b c

Fig. MIII.U3.3

Linia de intersecție a două corpuri se determină, de regulă, prin puncte comune suprafețelor corpurilor intersectate. Două suprafețe S_1 *şi* S_2, intersectate cu o a treia suprafață (auxiliară) S_3, determină două linii de intersecție: $(L_1) = S_1 \cap S_3$ şi $(L_2) = S_2 \cap S_3$. Intersecția liniilor (L_1) şi (L_2) determină un punct comun suprafețelor S_1 şi S_2, deci un punct ce aparține liniei de intersecție a acestor suprafețe. Ca urmare, pentru determinarea intersecției a două corpuri este necesară utilizarea unor suprafețe auxiliare. Se recomandă utilizarea unor suprafețe auxiliare ale căror intersecții cu suprafețele corpurilor date să fie uşor de construit. Suprafețele auxiliare, utilizate în mod frecvent, sunt plane sau suprafețe sferice. Suprafețele auxiliare care limitează intersecția celor două corpuri poartă denumirea de suprafețe auxilare limită.

În determinarea liniilor de intersecție a două corpuri geometrice este necesară parcurgerea următoarelor etape:

- determinarea suprafețelor auxiliare (plane sau sferice) necesare; suprafețele auxiliare se aleg funcție de natura corpurilor intersectate, de poziția lor reciprocă şi de poziția în spațiu;
- stabilirea tipului de intersecție (pătrundere sau rupere), cu ajutorul suprafețelor limită;
- determinarea punctelor curente ale liniei de intersecție;
- stabilirea ordinei de unire a punctelor determinate, utilizându-se *metoda diagramelor desfăşuratelor convenționale*;
- determinarea vizibilității intersecției.

În cele ce urmează, sunt analizate tipurile de intersecții frecvent întâlnite în alcătuirea formelor constructive ale unor produse industriale.

MIII.U3.3.1. Intersecția poliedrelor

Intersecțiile de poliedre apar frecvent în alcătuirea obiectelor complexe sau semicomplexe. Ca atare este necesară reprezentarea grafică a acestor linii de intersecție pe desenele plane ale acestor obiecte.

Poligonul sau poligoanele de intersecție dintre două poliedre se pot determina prin puncte sau prin laturi. În exemplele prezentate în continuare se va utiliza metoda determinării prin puncte, care constă în intersectarea muchiilor unui poliedru cu fețele celuilalt poliedru.

Rezolvarea intersecției presupune parcurgerea următoarelor etape:

- determinarea direcției planelor auxiliare de secțiune şi stabilirea planelor utile;
- determinarea punctelor de intersecție;
- stabilirea ordinii de unire a punctelor de intersecție;
- determinarea vizibilității.

Planele auxiliare de secțiune se vor construi prin muchiile celor două corpuri, iar direcția lor se va stabili după cum urmează:

- la intersecția a două prisme, planele se vor lua paralele cu muchiile ambelor corpuri;

- la intersecția a două piramide planele se vor construi prin vârfurile celor două corpuri;

- la intersecția unei prisme cu o piramidă planele se vor lua paralele cu muchiile prismei şi prin vârful piramidei.

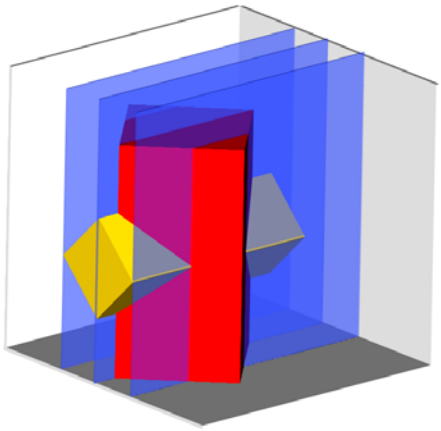


Fig. MIII.U3.4

Se consideră două prisme drepte cu bazele pătrate care se intersectează ca în fig. MIII.U3.4. Una din prisme este perpendiculară pe planul orizontal de proiecție *[H]*, cealaltă este perpendiculară pe planul lateral de proiecție *[L]* şi o străpunge pe prima.

Pentru rezolvarea intersecției, în epură (fig. MIII.U3.5), se iau plane auxiliare de front prin muchiile prismei fronto-orizontale. Aceste plane intersectează prisma verticală după *dreptele verticale* care pleacă din punctele *1, 2, 3, 4, B* şi *D*. Aceste drepte se intersectează cu muchiile prismei fronto-orizontale în punctele M_2, B_N, P_4, B_Q, M_2 şi M_1, D_Q, P_3, D_N. Prin unirea acestor puncte rezultă poligoanele de intersecție a celor două corpuri. Pentru determinarea vizibilității în proiecție verticală, în fig. MIII.U3.5, în partea dreaptă jos, este prezentată *diagrama desfăşuratelor convenționale* ale celor două prisme.

În această diagramă sunt reprezentate schematic desfăşuratele celor două prisme şi punctele în care muchiile uneia intersectează fețele celeilalte. La construcția diagramei se ține seama de următoarele reguli:

- se reprezintă numai muchiile laterale ale prismelor (poliedrelor), fără a se ține seama de lungimea acestora şi de distanța dintre ele;
- muchiile unei prisme se reprezintă perpendiculare pe muchiile celeilalte;
- muchiile care nu participă la intersecție sunt aşezate la periferia diagramei;
- se unesc punctele situate pe aceeaşi față;
- nu se unesc punctele situate pe aceeaşi muchie.

În diagramă sunt notate cu *v* fețele vizibile şi cu *i* cele invizibile. Laturile vizibile ale liniei de intersecție rezultă numai din intersecția unor fețe vizibile.

Vizibilitatea liniei de intersecție se face deci după regula:

$v+v=v$, $v+i=i$ şi $i+i=i$.

În funcție de situație se întocmeşte câte o diagramă pentru fiecare plan de proiecție.

1. Reluați rezolvarea intersecției din fig. MIII.U3.5, considerând latura pătratului bazei pentru prisma verticală de 40 mm, iar latura pătratului bazei pentru prisma fronto-orizontală de 25 mm.

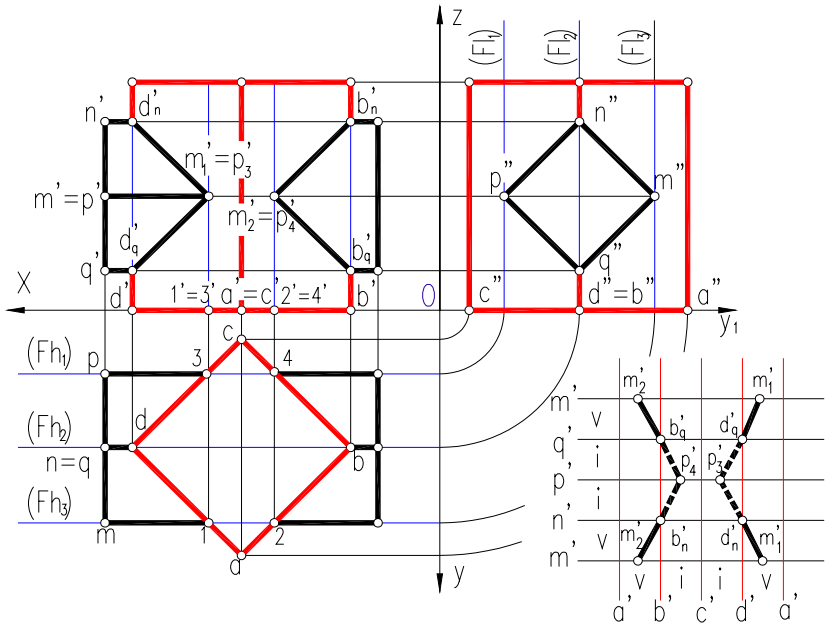


Fig. MIII.U3.5

În fig. MIII.U3.6 se prezintă epura intersecției dintre o piramidă dreaptă cu baza un pătrat situată în planul *[H]* şi o prismă dreaptă perpendiculară pe planul lateral *[L]*.

Pentru rezolvarea intersecției s-au luat prin muchiile piramidei (vârful piramidei) şi prin muchiile prismei plane fronto-orizontale (perpendiculare pe planul lateral de proiecție *[L]*). Ordinea de unire a punctelor şi vizibilitatea liniei de intersecție s-au determinat prin diagramele desfăşuratelor convenționale (pentru proiecția verticală în fig. MIII.U3.7 şi pentru proiecția orizontală în fig. MIII.U3.8).

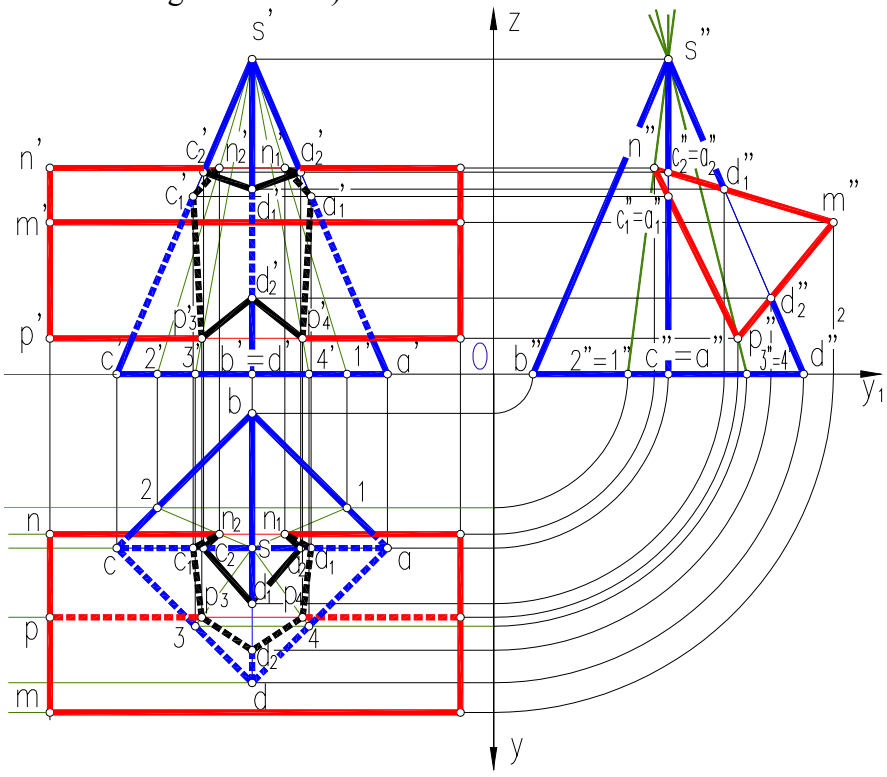


Fig. MIII.U3.6

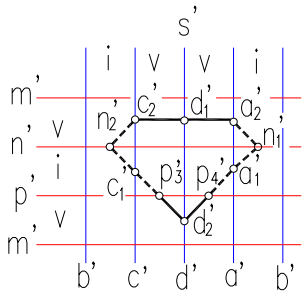


Fig. MIII.U3.7

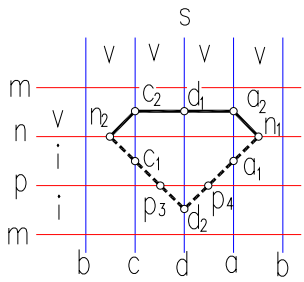


Fig. MIII.U3.8

Acoperiți cele două diagrame din figurile fig. MIII.U3.7 şi fig. MIII.U3.8 şi reluați construcția lor.

MIII.U3.3.2. Intersecția corpurilor cilindro-conice

a) Intersecția de cilindri cu axele perpendiculare

Determinarea curbei de intersecție a doi cilindri se poate face, ca şi în cazul intersecției dintre prisme, prin secționarea cilindrilor cu plane paralele cu generatoarele lor. Se va alege un număr convenabil de plane de secțiune şi, la intersecția generatoarelor, se vor determina punctele prin care vor trece curbele de intersecție.

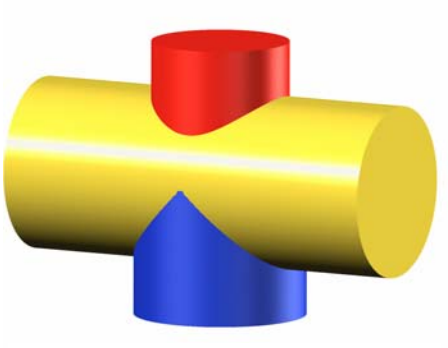


Fig. MIII.U3.9

Se consideră trei cilindri circulari drepți (fig. MIII.U3.9 – reprezentare spațială, fig. MIII.U3.10 – vedere frontală şi dimensiuni) cu axele perpendiculare si concurente, respectiv, axa cilindrului orizontal o fronto-orizontală (perpendiculară pe planul lateral de proiecție *[L]*), iar axa cilindrilor verticali o dreaptă verticală. Baza cilindrului inferior este situată în planul orizontal de proiecție *[H]*.

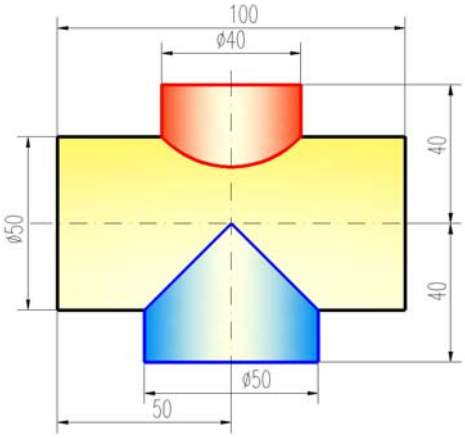


Fig. MIII.U3.10

Se utilizează plane de front (fig. MIII.U3.11) care secționează cilindrii după generatoare - drepte fronto-orizontale şi drepte verticale. La intersecția acestora se obțin punctele curbelor de intersecție.

Se remarcă faptul că în proiecție verticală (vedere frontală), dacă cilindrii au acelaşi diametru, intersecția se vede sub forma a două drepte concurente pe axă, altfel, intersecția este un arc de hiperbolă, care, în desenele tehnice, se aproximează cu un arc de cerc.

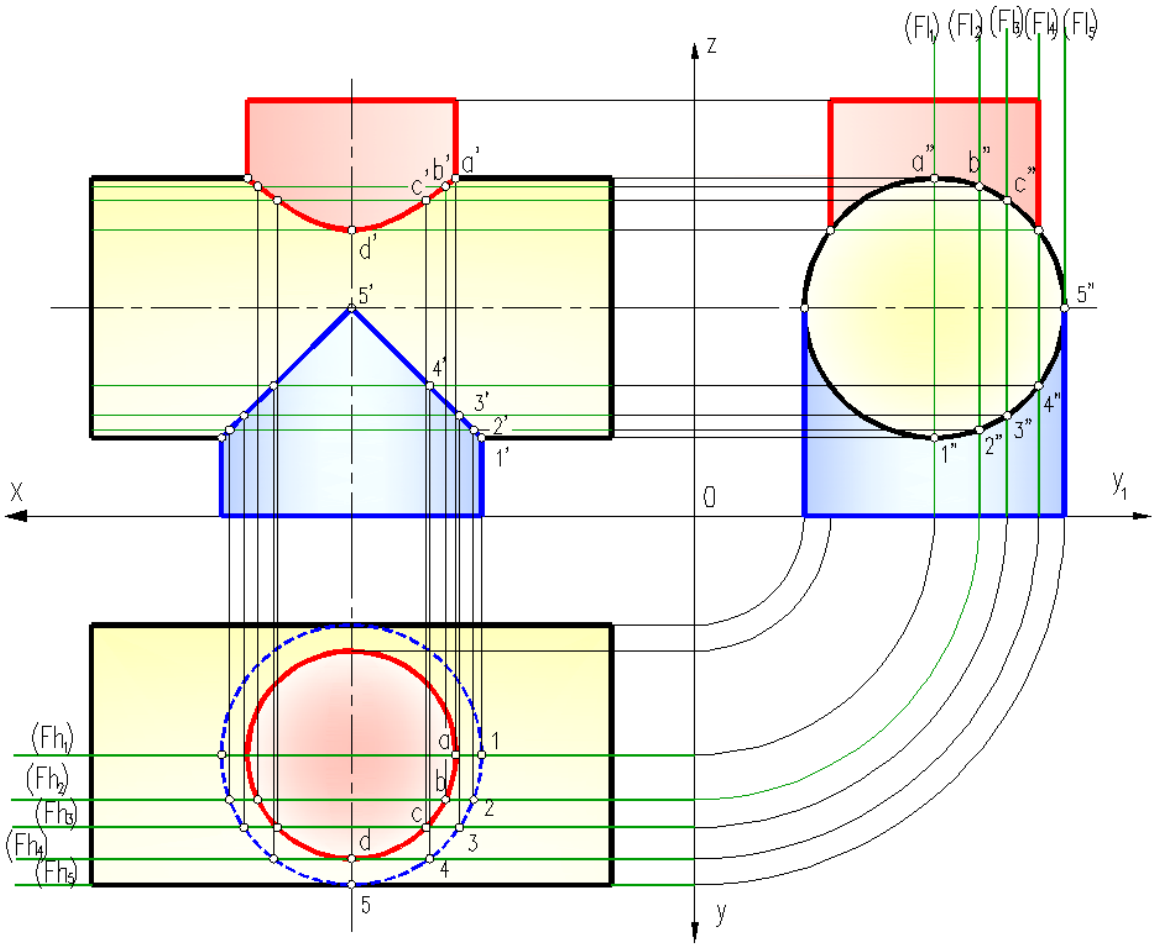


Fig. MIII.U3.11

b) Intersecția dintre un con şi un cilindru cu axele perpendiculare

Se consideră conul circular drept cu baza în planul orizontal de proiecție care se intersectează cu un cilindru fronto-orizontal având axele perpendiculare şi concurente (fig. MIII.U3.12).

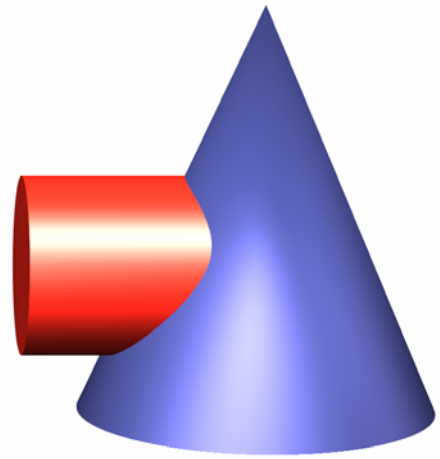


Fig. MIII.U3.12

În fig. MIII.U3.13 se prezintă epura acestei intersecții.

Pentru determinarea curbei de intersecție se utilizează ca plane auxiliare de secțiune plane de nivel. Acestea determină în con cercuri concentrice paralele cu cu generatoarele de contur aparent. La intersecția acestor generatoare cu cercurile rezultă punctele care definesc curbele de intersecție în plan orizontal şi în plan vertical.

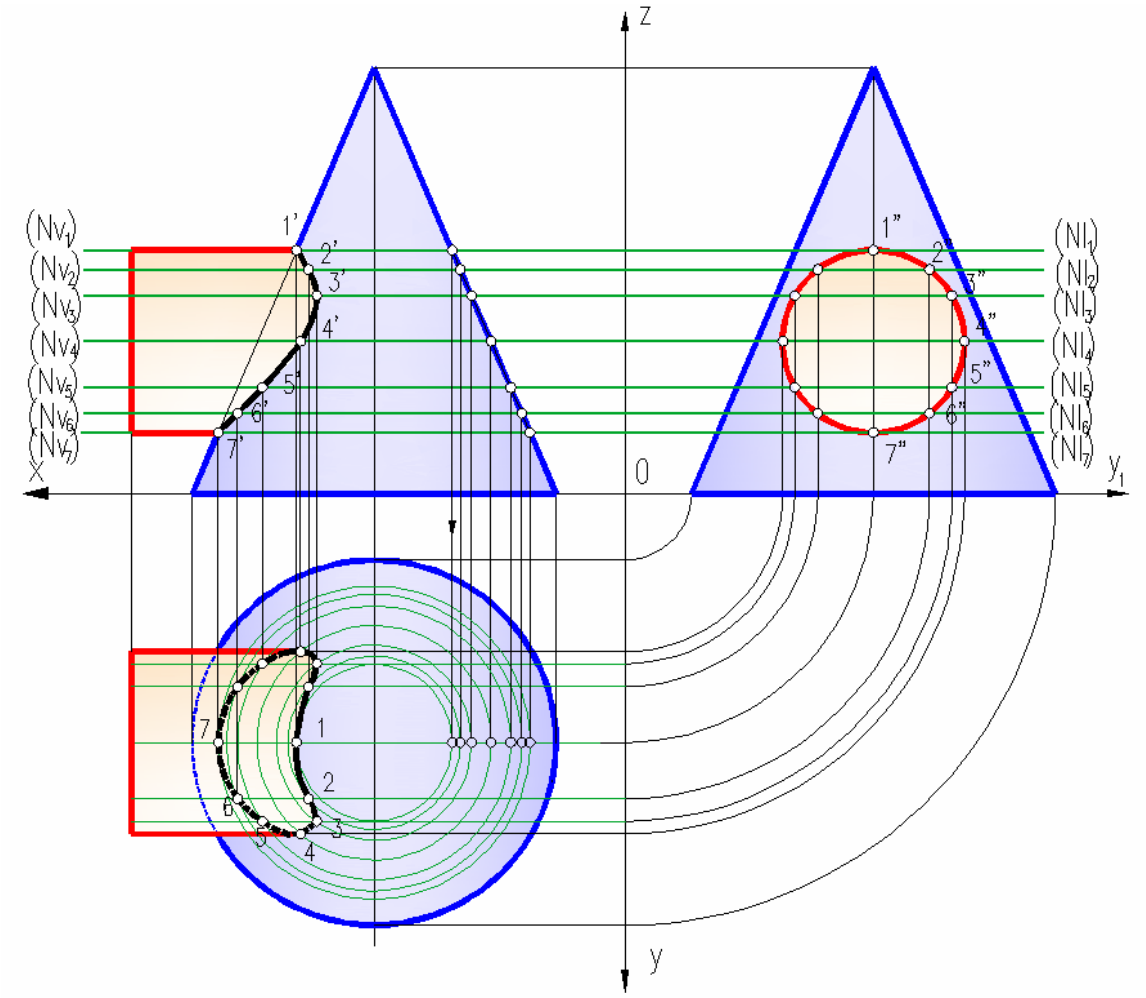


Fig. MIII.U3.13

Exemple

1. Să se construiască epura intersecției dintre prismele drepte *[ABCDA$_0$B$_0$C$_0$D$_0$]* și *[MNPQM$_0$N$_0$P$_0$Q$_0$]*. Dimensiunile și amplasarea acestora față de planele de proiecție sunt prezentate în fig. MIII.U3.14. Bazele sunt trapeze isoscele.

Indicație: Pentru rezolvarea intersecției se utilizează plane auxiliare de front. Intersecția este o rupere.

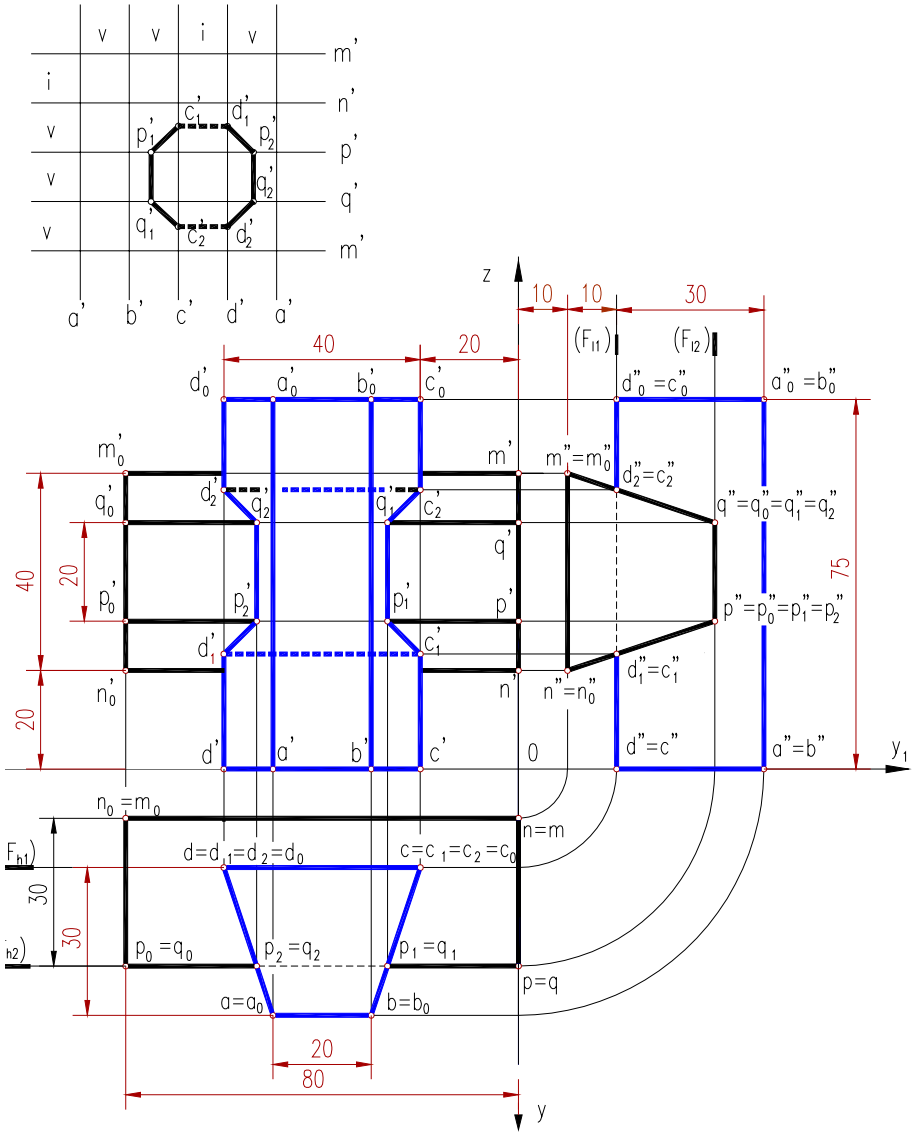


Fig. MIII.U3.14

2. Să se construiască epura intersecției dintre o piramidă dreaptă cu baza un pătrat situat în planul *[H]* şi o prismă dreaptă având muchiile fronto-orizontale şi baza un triunghi echilateral (fig. MIII.U3.15). Dimensiunile şi poziția celor două corpuri, precum şi rezolvarea în epură sunt prezentate în fig. MIII.U3.16.

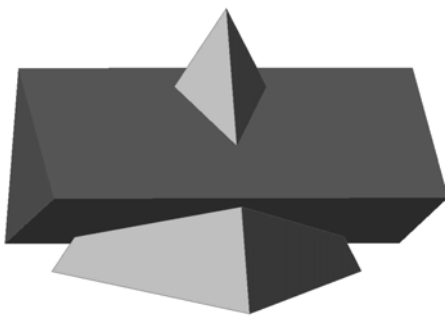


Fig. MIII.U3.15

Indicație: Prin muchiile prismei şi prin cele ale piramidei se construiesc plane auxiliare perpendiculare pe planul lateral de proiecție. Se pot utiliza şi plane auxiliare de nivel prin muchiile prismei.

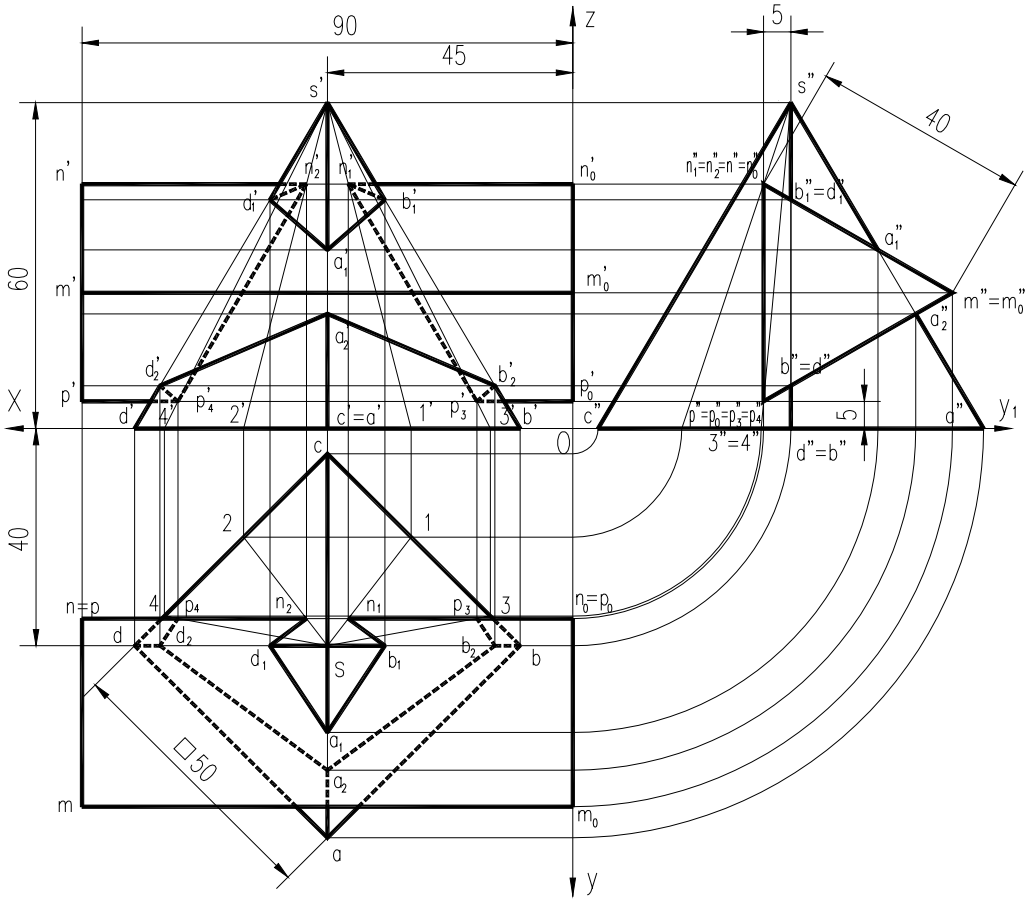


Fig. MIII.U3.16

3. Să se construiască epura intersecției dintre corpurile date în Fig. MIII.U3.17 (o piramidă cu baza un pătrat şi un cilindru circular drept) şi apoi să se desfăşoare cele două corpuri.

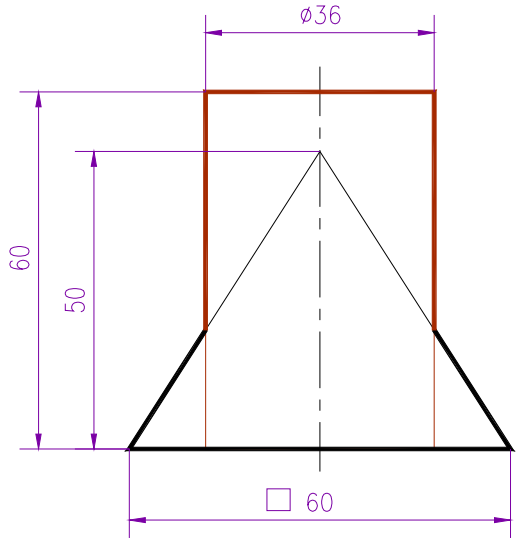


Fig. MIII.U3.17

Rezolvarea este prezentată în figurile Fig. MIII.U3.18, Fig. MIII.U3.19 şi Fig. MIII.U3.20.

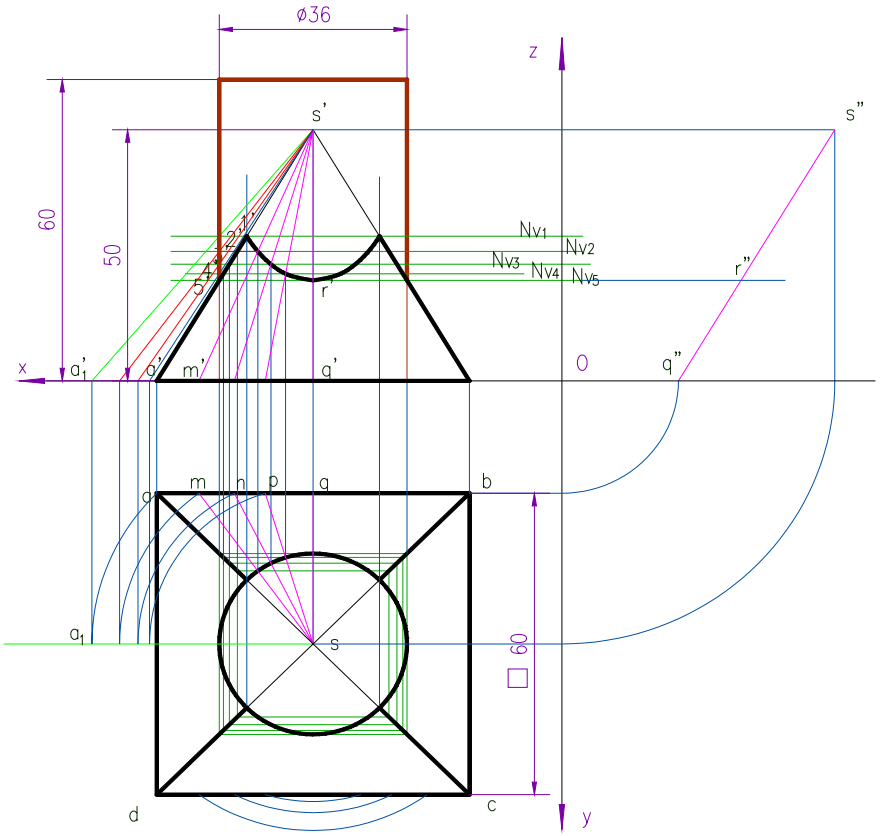


Fig. MIII.U3.18

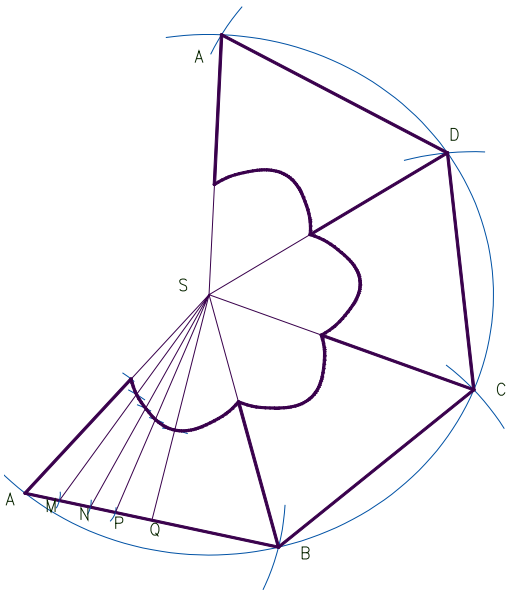


Fig. MIII.U3.19

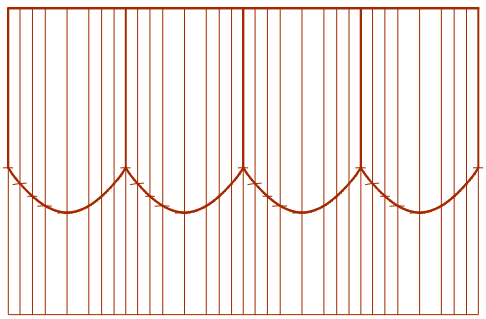


Fig. MIII.U3.20

1. Să se determine intersecția dintre prismele *[ABCDEF]* şi *[MNPRTS]*, cunoscându-se: *A(50,17,0), B(35,30,0), C(25,6,0), D(50,17,55), M(12,22,37), N(12,12,13), P(12,35,24), R(67,22,37)*, prismele având bazele situate în plane paralele şi direcțiile muchiilor date de */AD/* şi respectiv */MRI/*.
Indicație: este necesară utilizarea proiecției laterale, iar planele auxiliare utilizate vor fi plane de front.

2. Să se construiască epura intersecției dintre doi cilindri circulari drepți plasați în spațiu după cum urmează: un cilindru are axa fronto-orizontală (O_1O_2) şi baza paralelă cu planul *[L]* un cerc de rază R_1, iar cel de-al doilea cilindru are axa verticală (O_3O_4) şi baza în planul *[H]* un cerc de rază R_2. Se dau: $O_1(15,40,30)$; $O_2(65,40,30)$; $R_1=20$ *mm*; $O_3(40,35,0)$, $O_4(40,35,60)$.
Indicație: se utilizează ca plane auxiliare plane de front paralele cu axele celor doi cilindri.

3. Să se construiască intersecția dintre un con circular drept cu înălțimea axa (SO_3), având ca bază în planul *[H]* un cerc cu centrul în O_3 şi raza R_1 şi un cilindru circular drept cu axa (O_1O_2), baza paralelă cu planul *[L],* un cerc cu centrul în O_1 şi raza R_2. Se dau: $O_3(35,35,0)$, $S(35,35,58)$, $R_1=30$ *mm*, $O_1(0,35,20)$, $O_2(70,35,20)$ şi $R_2=20$ *mm*.
Indicație: se vor utiliza ca plane auxiliare plane de nivel.

Să ne reamintim...

- Determinarea liniilor de intersecție a două corpuri geometrice necesită parcurgerea următoarelor etape:

- determinarea suprafețelor auxiliare (plane sau sferice) necesare; suprafețele auxiliare se aleg funcție de natura corpurilor intersectate, de poziția lor reciprocă şi de poziția în spațiu;

- stabilirea tipului de intersecție (pătrundere sau rupere), cu ajutorul suprafețelor limită;
- determinarea punctelor curente ale liniei de intersecție;
- stabilirea ordinei de unire a punctelor determinate, utilizându-se *metoda diagramelor desfăşuratelor convenționale*;
- determinarea vizibilității intersecției

- Rezolvarea intersecției dintre poliedre presupune parcurgerea următoarelor etape:

- determinarea direcției planelor auxiliare de secțiune şi stabilirea planelor utile;
- determinarea punctelor de intersecție;

- stabilirea ordinii de unire a punctelor de intersecție;
- determinarea vizibilității.

▪ La construcția diagramei *desfăşuratelor convenționale* se ține seama de următoarele reguli:

- se reprezintă numai muchiile laterale ale prismelor (poliedrelor), fără a se ține seama de lungimea acestora şi de distanța dintre ele;
- muchiile unei prisme se reprezintă perpendiculare pe muchiile celeilalte;
- muchiile care nu participă la intersecție sunt aşezate la periferia diagramei;
- se unesc punctele situate pe aceeaşi față;
- nu se unesc punctele situate pe aceeaşi muchie.

▪ Determinarea curbei de intersecție a doi cilindri se poate face, ca şi în cazul intersecției dintre prisme, prin secționarea cilindrilor cu plane paralele cu generatoarele lor.

▪ Pentru intersecția dintre un con circular drept cu baza în planul orizontal de proiecție şi un un cilindru fronto-orizontal, se pot utiliza ca plane auxiliare de secțiune plane de nivel.

MIII.U2.6. Rezumat

În cadrul acestei unități de învățare s-au definit tipurile de intersecții dintre diverse corpuri geometirce şi modalitațile de rezolvare a acestora. S-au prezentat intersecții de prisme, de prismă-piramidă, intersecții de cilindri circulari drepți şi intersecții dintre conuri circulare drepte şi cilindri circulari drepți. S-a explicat metoda *diagramei desfăşuratelor convențională* pentru a stabili liniile de intersecție, atât ca formă cît şi ca vizibilitate în epură. S-au prezentat aplicații rezolvate lămuritoare.

MIII.U2.7. Test de evaluare a cunoştințelor

1. Care sunt etapele rezolvării intersecției de poliedre?

2. Ce fel de plane auxiliare de secțiune se aleg pentru determinarea intersecției dintre o piramidă dreaptă cu baza un pătrat situat în planul *[H]* şi o prismă dreaptă având muchiile fronto-orizontale?

3. Explicați *metoda diagramelor desfăşuratelor convenționale.*

4. Cum se aleg planele auxiliare de secțiune la determinarea intersecției a doi cilindri?

5. Cum se aleg planele auxiliare de secțiune la determinarea intersecției a două conuri?

6. Cum se aleg planele auxiliare de secțiune la determinarea intersecției dintre un cilindru circular drept şi un con circular drept?

Temă de control

Se dă construcția din fig. MIII.U3.21.

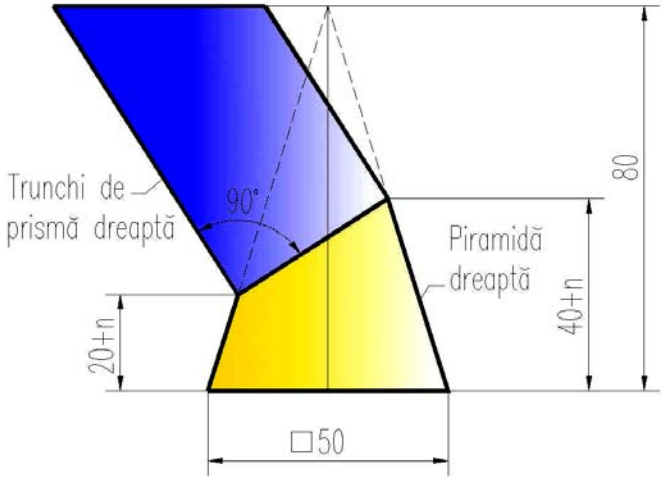


Fig. MIII.U3.21

Se cere să se construiscă desfăşuratele celor două corpuri.

Să se decupeze din hârtie cele două desfăşurate şi să se realizeze (prin lipire) macheta acestei construcții.

Indicații: se întocmeşte epura construcției. Se consideră piramida ca fiind aşezată cu baza (pătrat) în planul orizontal de proiecție. Vedera din fig. MIII.U3.21 se alege chiar proiecția verticală a celor două corpuri şi se determină apoi proiecția orizontală a piramidei. Se consideră că piramida este secționată cu un plan de capăt având urma verticală chiar proiecția bazei prismei. Se determină figura de secțiune în proiecție orizontală. Se construieşte şi proiecția orizontală a trunchiului de prismă, figurând cu linie întreruptă muchiile acoperite. Se află, prin rabatere, adevărata mărime a secțiunii, care reprezintă baza trunchiului de prismă. Pentru desfăşurarea trunchiului de piramidă se află adevărata mărime a muchiilor prin rotație. Pentru desfăşurarea trunchiului de prismă, distanța dintre muchii este dată de lungimea laturilor poligonului de bază, iar lungimea muchiilor se citeşte din poiecția verticală, acestea fiind drepte frontale.

- Rezolvarea temei se va face pe un format A3, liniat, în creion, cu instrumente de desen. Se recomandă şi folosirea creioanelor colorate.
- *"n"* reprezintă numărul de ordine al studentului în catalog.
- Tema de control se va preda la data anunțată în cadrul seminarului.

Bibliografie

1. Aldea, S. Geometrie descriptivă. Institutul Politehnic Bucureşti, 1977.
2. Alexandru, V ş.a. Geometrie descriptivă şi desen. Partea I, Geometrie descriptivă – curs şi aplicaţii. Universitatea din Galaţi, 1982.
3. Arustamov, K.A. Problems in Descriptive Geometry. Mir Publishers, Moscou, 1974.
4. Batog, I., Soare, M., Urdea, M. Geometrie descriptivă. Probleme şi aplicaţii. Universitatea "Transilvania" din Braşov, 2001.
5. Bogoliubov, S.K. Exercises in machine drawing. Mir Publishers, Moscou, 1975.
6. Boloş, C. Geometrie descriptivă. Editura Universităţii "Petru Maior", Târgu Mureş, 1998.
7. Brana, M. ş.a. AutoCAD. Ghid practic I-2D. Editura Tehnică, Bucureşti, 1994.
8. Botez, Şt. Geometrie descriptivă. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.
9. Enache, M., Ionescu, I. Geometrie descriptivă şi perspectivă. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
10. Frolov, S.A. Nacertatelnaia geometria. Maşinostroenie, Moskva, 1983.
11. Hoelscher, R.P. ş.a. Graphics for Enginees. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1968.
12. Iancău, V. ş.a. Reprezentări geometrice şi desen tehnic. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
13. Ivan, M.C. Grafică industrială asistată de calculator. Editura Universităţii "Transilvania" din Braşov, 2002.
14. Lehman, H.L. Géométrie descriptive. Ed. Dunod, Paris, 1966.
15. Lihteţchi, I.. Geometrie descriptivă. Suport teoretic şi aplicaţii. Curs pentru Învăţământ la distanţă, secţia I.E.I., Universitatea "Transilvania" din Braşov, 2009.
16. Lihteţchi, I., ş.a. Grafică asistată 3D în AutoCAD. Editura Universităţii "Transilvania" din Braşov, 2003.
17. Lihteţchi, I. Infografică tehnică. Culegere de lucrări. Editura Universităţii „Transilvania" din Braşov, 2005.
18. Matei, A., Gaba, V., Tacu, T. Geometrie descriptivă. Editura tehnică, Bucureşti, 1982.
19. Marin, D. ş.a. Geometrie descriptivă. Probleme şi aplicaţii. Editura BREN, Bucureşti, 1988.
20. Moncea, J. Geometrie descriptivă şi desen tehnic, vol. I. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
21. Olteanu, F., Clinciu, R. Geometrie descriptivă. Universitatea "Transilvania" din Braşov, 1999.

22. Paré, E.G. ş.a Descriptive Geometriy. 8th Edition. Macmillan Publishing Company, New York, 1991.
23. Precupeţu, P., Dale, C. Probleme de geometrie descriptivă cu aplicaţii în tehnică. Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.
24. Tănăsescu, A. Geometrie descriptivă. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975.
25. Popa, E., Sava, R. Geometrie descriptivă. Curs şi aplicaţii tehnice. Editura Universităţii „Transilvania" din Braşov, 2005.
26. Schörner, E. Darstellende Geometrie. Carl Hanser Verlag, München, 1973.
27. Segal, L., Tăbăcaru, L., Racocea, C. Indrumar de laborator pentru grafică asistată. Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi, 1995.
28. Silianu, E., ş.a. Geometrie descriptivă. Culegere de teme şi lucrări. Universitatea „Transilvania" din Braşov, 1980.
29. Tănăsescu, A. Geometrie descriptivă, perspectivă, axonometrie. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.
30. Urdea, M., Păunescu, R. Grafică asistată 2D-3D. AutoCAD – SolidWORKS. Curs şi aplicaţii. Editura Universităţii "Transilvania" din Braşov, 2005.
31. Văcariu, G., ş.a. Geometrie descriptivă şi desen tehnic. Universitatea „Transilvania" din Braşov, 1989.
32. Velicu, D. ş.a. Geometrie descriptivă. Universitatea "Transilvania" din Braşov, 1991.
33. Velicu, D. ş.a. Geometrie descriptivă. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1999.
34. Velicu, D. Lihteţchi, I.. Geometrie descriptivă. Suport teoretic şi aplicaţii. Editura Universităţii "Transilvania" din Braşov, 2008, (Suport electronic).

Geometria Descriptivă este o parte a Geometriei Proiective şi este considerată regina geometriilor. Ea stabileste metodele de transformare a spațiului tridimensional *(S3)* în spațiul bidimensional *(S2)* şi reciproc, făcând posibil actul ingineresc de creație şi execuție.

Prin studiul Geometriei descriptive, care este *ştiința reprezentării grafice plane a spațiului***,** corpurile pot fi reprezentate în plan. Aceste reprezentări, în două dimensiuni, definesc cu exactitate forma corpului în spațiu şi oferă totodată şi posibilitatea deducerii cu uşurință a poziției acestuia față de alte corpuri.

Cursul de Geometrie descriptivă este structurat în *trei module*, astfel:

- primul modul cuprinde trei unități de învățare;
- al doilea modul cuprinde patru unități de învățare;
- al treilea modul cuprinde trei unități de învățare.

La rândul lor, fiecare din cele 10 unități de învățare cuprinde: introducere, obiective, aspecte teoretice privind tematica unității, exemple, probleme propuse spre discuție şi rezolvare, precum şi teste de autoevaluare.

La sfârşitul fiecărui modul este indicată o *temă de control*.

ISBN – 978 – 973 – 598 – 756 - 1